

Minimal realizations of interconnected dynamical systems

Fausto Posso R.

*Departamento de Ciencias, Universidad de Los Andes-Táchira.
San Cristóbal, Venezuela. E-mail:fausto@tach.ula.ve*

Abstract

The problem of minimal realization (MR) for interconnected dynamical systems (IDS) with component-connection model (CCM) is studied in this paper. CCM is a structural approximation that considers the IDS composed by two contributions: one, related with the components (or subsystems) represented by a dynamic first order model and, the other, related with the connections among the components, with a linear algebraic model. The main CCM feature is information decoupling, which is done by separating the dynamics of the components from the system topology. In this context, obtaining a system order reduction is highly desirable given the dimensions of the interconnected system. In this paper, several alternative procedures for obtaining a MR according to the phase of the CCM considered are proposed and developed. These procedures were implemented in a MATLAB toolbox developed by the author and were applied to solve several cases under study. The results allow the establishment of characteristics and properties of the MR for CCM. These results agree with those reported using other methods of order reduction, especially in the matter of the equivalence among procedures

Key words: Minimal realizations, component-connection model, interconnected dynamical systems, MatLab.

Realización mínima de sistemas dinámicos interconectados

Resumen

Se estudia el problema de realización mínima (RM) de sistemas dinámicos interconectados (SDI) con Modelo Componente-Conexión (MCC), aproximación estructural que considera al SDI como formado por dos contribuciones: una, relacionada con los componentes (o subsistemas) representados por un modelo dinámico de primer orden y, otra, relacionada con las conexiones entre los componentes, con un modelo algebraico lineal. La característica básica del MCC es el desacoplamiento de la información al separar la dinámica de los componentes de la topología del sistema. En este contexto obtener una reducción del orden es altamente deseable dadas las dimensiones del sistema interconectado. En este trabajo se proponen y desarrollan varios procedimientos alternativos de obtención de una RM de acuerdo a la fase del MCC considerada, aplicándose a varios casos de estudio y resolviéndose mediante la generación de un *toolbox* en la aplicación MATLAB. Los resultados permiten establecer características y propiedades de la RM del MCC y son consistentes con los reportados utilizando otros métodos de reducción del orden, en especial lo referente a la equivalencia entre procedimientos.

Palabras clave: Realización mínima, modelo componente-conexión, sistemas dinámicos interconectados, MatLab.

Introducción

Dentro de la Teoría de Sistemas, hay un tópico que siempre ha suscitado gran interés por sus particularidades matemáticas y por su íntima relación con importantes propiedades estructurales del sistema, éste tópico es el conocido como *realización*. De forma general, ésta tiene que ver con una relación de equivalencia entre dos representaciones alternas del sistema, a saber: modelo matriz función de transferencia (MFT) en el espacio de Laplace y modelo de estado (ME) en el dominio temporal. Así para un sistema lineal, S , con un modelo matriz función de transferencia (MFT), $Z(s) \in \mathfrak{R}^{r \times m}$, y un modelo de estado lineal multivariable (ME), $\Sigma: (A, B, C, D)$, con ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du \quad (1)$$

con $A^{n \times n}$, $B^{n \times m}$, $C^{r \times n}$, $D^{r \times m}$. Entonces, Σ es una **realización** de $Z(s)$, si y sólo si:

$$Z(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2)$$

En general no existe una solución única al problema de realización, ya que su orden depende en gran medida del procedimiento de obtención empleado [1], entonces debe existir una realización de menor orden posible que genere la misma MFT y que preserve las propiedades fundamentales del sistema, ésta es la **realización mínima**, RM. Los resultados básicos sobre el orden y propiedades de la RM para sistemas multivariables, se basan en los conceptos de controlabilidad y observabilidad [2, 3] y ha sido un tópico ampliamente estudiado. Para una revisión bastante completa sobre el tema, véase [4].

Por otra parte, por un sistema dinámico interconectado, SDI, se entiende un conjunto de subsistemas de orden relativamente pequeño, unidos o conectados de alguna manera [5, 6]. Dentro de las diferentes formulaciones basadas en esta filosofía de análisis, destaca el Modelo Componente-Conexión (MCC) [7], el cual separa la influencia de los componentes individuales de la topología del sistema al considerar el mismo como formado por componentes desacoplados. Así se establece un modelo dinámico de primer orden para los componentes y un modelo algebraico

para las conexiones; la unión de estos modelos conforman el llamado *Modelo Componente-Conexión* (MCC). El MCC se ha estudiado tanto en sus formulaciones básicas [8] como en sus propiedades estructurales [9-10] y aplicaciones [11-12].

Es bien conocido que las dificultades asociadas con el modelado, simulación y control de un SDI se incrementan dramáticamente con el tamaño del mismo, por lo que se han orientado esfuerzos en el desarrollo de diferentes técnicas de reducción del orden del modelo que alivien en parte tales dificultades [13]. En el contexto del MCC, Wasynczuck y DeCarlo, [14] tratan el problema de la reducción del orden que preserve la estructura utilizando técnicas de descomposición modal y perturbaciones singulares, mientras que Feliachi [15] trabaja con reducción del orden en términos de agregación exacta; en [16] se generalizan sus resultados para el caso de que ninguno de los componentes es reducible. Tanto en [14] como en [16] se establece que la reducción a nivel de componentes es equivalente a la reducción a nivel del sistema global. Se concluye que esta equivalencia tiene sus ventajas ya que la simulación, análisis de sensibilidad, y diseño de controladores para SDI son posibles sin necesidad de construir el modelo de estado del sistema global.

Otra manera, tal vez más conveniente, de reducir el orden del sistema es obteniendo la RM del SDI. No se conoce ningún trabajo al respecto, salvo el planteamiento preliminar de [8], a pesar de las ventajas evidentes del método de reducción vía RM con respecto a los ya mencionados, ya que se garantiza la observabilidad y controlabilidad del modelo resultante preservando así la estructura y las características dinámicas del sistema original, algo que no está totalmente garantizado en otros métodos de reducción que pueden incluso provocar un colapso en una parte de la estructura al remover estados dinámicamente significantes [15]. Así, el objetivo de este trabajo es estudiar la RM de SDI con MCC, en especial la relación entre la RM obtenida en diferentes niveles de construcción del MCC. Se proponen y desarrollan varios procedimientos de obtención de la RM, de acuerdo al nivel considerado. En todos los casos, el punto de partida es el mismo: un modelo de estado para los n componentes y el modelo de conexión entre los mismos y siendo el propósito obtener un modelo global

mínimo $(MG)_{\min}$. Los procedimientos se implementan computacionalmente mediante la generación de un toolbox en MATLAB® y se aplican a varios casos de estudio tomados de la bibliografía. De sus resultados se infieren propiedades y características básicas de la RM de SDI con modelo MCC, en especial condiciones sobre la unicidad y/o equivalencia y se determina la consistencia de los mismos con los obtenidos por otros métodos de reducción del orden.

Modelo Componente-Conexión

Físicamente, los componentes pueden tomar una gran cantidad de formas, según sea el fenómeno en estudio (físico, económico, social, etc). Matemáticamente, los componentes son simplemente mapeos entre la señal de entrada y la señal de salida.

El modelo estado lineal de un sistema componente es de la forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x_i + B_i a_i \quad b_i = C_i x_i + D_i a_i \quad (4)$$

donde $i = 1, \dots, n$.

Desde un punto de vista teórico, es conveniente unir (acoplar) las n ecuaciones componentes en el **modelo de componentes compuesto**, tal que:

$$\frac{dx}{dt} = A_C x + B_C a \quad b = C_C x + D_C a \quad (5)$$

donde $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$; $b = \text{col}(b_1, \dots, b_n)$; $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n)$; $A_C = \text{bloq.diag}(A_1, \dots, A_n)$; $B_C = \text{bloq.diag}(B_1, \dots, B_n)$; $C_C = \text{bloq.diag}(C_1, \dots, C_n)$; $D_C = \text{bloq.diag}(D_1, \dots, D_n)$.

En cuanto a las conexiones, éstas se expresan en términos de algún tipo de ley de conservación entre las variables de entrada y salida; por ejemplo, las leyes de Kirchoff. En el contexto del MCC, el modelo de conexión es de tipo geométrico expresado en términos de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\begin{bmatrix} a \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ u \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde las L_{11} son matrices reales de dimensión apropiada usualmente dispersas, y u y y son los

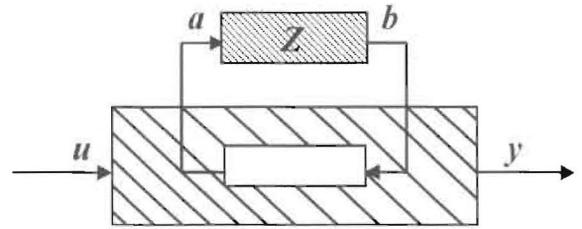


Figura 1. SDI con modelo MCC.

vectores de entrada y salida global, respectivamente.

En resumen, un MCC comprende un conjunto de componentes caracterizado por un modelo dinámico, y un conjunto de restricciones algebraicas lineales sobre las variables de entrada y salida (Figura 1):

Los sistemas componentes tienen el modelo de componentes compuesto Z , con a vector de entrada componente compuesto y b vector de salida componente compuesto. La zona rayada (\backslash) alrededor del modelo de componentes compuesto representa la estructura de conectividad con entradas vectoriales u y b , y salidas a y y (ec. 6). Finalmente, el vector de entrada del sistema global, u , representa las entradas externas y y representa las salidas desde el sistema global al mundo exterior.

Es necesario obtener una relación explícita entre la entrada y salida del sistema global y el MCC, es decir: dado el sistema interconectado, con ecuaciones (4) y (6) ¿cómo obtener el modelo de estado que represente al sistema global?

$$\frac{dw}{dt} = Fw + Gu \quad y = Hy + Ju \quad (7)$$

donde w es el vector de estado del sistema interconectado y F, G, H, J son matrices que dependen de (4) y (6). Para la mayoría de los casos, w coincide con x [17]. Bajo estas condiciones, por manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= [A_C + B_C M^{-1} L_{11} C_C] x + [B_C M^{-1} L_{12}] u \\ y &= [L_{21} (I + D_C M^{-1} L_{11}) C_C] x + [L_{21} D_C M^{-1} L_{12} + L_{22}] u \end{aligned} \quad (8)$$

asumiendo que $M^{-1} = (I - L_{11} D_C)^{-1}$ existe. De esta manera, el modelo de estado del sistema global

con ecuaciones (7) está totalmente definido al especificarse las matrices:

$$\begin{aligned} F &= A_C + B_C M^{-1} L_{11} C_C & G &= B_C M^{-1} L_{12} \\ H &= L_{21} (I + D_C M^{-1} L_{11}) C_C & J &= L_{21} D_C M^{-1} L_{12} + L_{22} \end{aligned} \quad (9)$$

Realización Mínima de SDI

Indiscutiblemente que los fundamentos teóricos, propiedades y métodos de obtención de la RM para sistemas generales son aplicables para los SDI; sin embargo en el contexto del MCC, la RM presenta ciertas particularidades que es necesario puntualizar; primero, la posibilidad de obtención de la RM en tres niveles plenamente diferenciados (modelo de los componentes, modelo de componentes compuesto, modelo global), y en consecuencia, la construcción de varios MGM mínimos; y segundo, la relación de equivalencia o no entre los diferentes MGM obtenidos. El siguiente teorema proporciona el instrumento para determinar tal equivalencia.

Teorema de Equivalencia entre RM de MCC

Sean:

$$RM_1: \quad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad b = Cx \quad (10)$$

$$RM_2: \quad \frac{dz}{dt} = A'z + B'a \quad b = C'z \quad (11)$$

dos ME mínimos con la misma MFT, con O_1 y O_2 matrices de observabilidad respectivas, entonces el modelo componente (11) es algebraicamente equivalente al modelo (10) a través de la transformación de estado

$$z = Tx \quad \text{con} \quad T = (O_2^t O_2)^{-1} O_2^t O_1 \quad (12)$$

Para una prueba de este teorema consulte [1].

Procedimientos de obtención de la RM de SDI

Procedimiento Uno

1. Obtener la realización mínima para todos y cada uno de los componentes.
2. Construir las matrices del modelo de componentes mínimo compuesto, MCMC.

3. Obtener el modelo global mínimo, MGM1.

Procedimiento Dos

1. Construir el modelo de componentes compuesto.
2. Obtener la realización mínima del modelo de componentes compuesto mínimo, MCCM.
3. Obtener el modelo global mínimo, MGM2.

Procedimiento Tres

1. Construir el modelo de componentes compuesto.
2. Obtener el modelo global.
3. Obtener la realización mínima del modelo global, MGM3.

Desarrollo Computacional: TOOLBOX REALIMIN

REALIMIN está constituido por un conjunto de rutinas que funcionan en forma encadenada y de manera interactiva con el usuario. En el contexto de MatLab, son archivos .m creados para propósitos específicos y que aprovechan ciertas funciones ya existentes en MatLab. Como resultado principal, REALIMIN obtiene la RM de un SDI con MCC, mediante la ejecución de las siguientes tareas:

1. Entrada de información del SDI, en diferentes modalidades: archivo, teclado.
2. Obtención de la RM para todos y cada uno de los procedimientos descritos.
3. Análisis de los resultados obtenidos: unicidad, equivalencia, comparabilidad.
4. Salida de información, en diferentes modalidades: archivo, impresora.

Las principales rutinas de REALIMIN se presentan en la Tabla 1.

Casos de estudio

La mayoría de los casos de estudio desarrollados se tomaron de la bibliografía y contemplan una amplia gama de alternativas con respecto al ME de los componentes, en especial que todos, varios o ninguno de ellos tenga un ME irreducible. En las Tablas 2 y 3, se muestran los principales resultados de dos casos específicos y tomados de [8] y [9].

Tabla 1
Principales rutinas de REALIMIN

RUTPRIN: rutina principal	Subrutinas
INFORSIS: Información sobre el SDI	MODEST: <i>modelo de estado de los componentes</i> MODCONEX: <i>modelo de conexión del SDI</i>
Niveles de obtención de la RM RMCOMPONENTES RMCOMPUESTO RMGLOBAL	MODCOMPUESTO: <i>modelo compuesto</i> MODGLOBAL: <i>modelo global</i> MINREAL: <i>modelo de estado mínimo</i>
ANÁLISIS: Comparación de RM	IND: <i>modelos a comparar</i> ORDEN: <i>orden de los modelos</i> COMPARA: <i>matriz de similaridad y comparación</i> CALCULADOS: <i>comprobación de los resultados</i>

Tabla 2
Caso de Estudio Uno

•Modelo de estado de los componentes

Componente 1

$$a_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \quad c_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad d_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Componente 2

$$a_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{vmatrix} \quad b_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad c_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad d_1 = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

•Modelo de conexión

$$L_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad L_{12} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad L_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_{22} = \begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$$

•Resultados

1. Modelo de estado mínimo para los tres procedimientos

	A_i	B_i	C_i	D_i
MGM1:	$\begin{vmatrix} -1.0000 & 0.0000 & 3.0000 \\ 0.1455 & 0.8000 & -2.3131 \\ 0.3333 & 1.8330 & -2.8000 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1.3416 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 2.2361 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$

Tabla 2
Caso de Estudio Uno (Continuación)

MGM2:	0.8000	0.1455	-2.3131	0.0000	0.0000	0.0000	2.2361	0
	0.0000	-1.0000	3.0000	-1.3416				
	1.8330	0.3833	-2.8000	0.0000				
MGM3:	-0.9680	0.3215	-3.3654	1.3200	0.0000	0.0000	2.2361	0
	0.1760	0.7680	-1.7390	-0.2400				
	0.0000	1.8630	-2.8000	0.0000				

2. Matriz de transformación: T

MGM1&MGM2			MGM1&MGM3			MGM2&MGM3		
0.0000	1.0000	0.0000	-0.9839	0.1789	0.0000	0.1789	0.9839	0.0000
1.0000	0.0000	0.0000	0.1789	0.9839	0.0000	-0.9839	0.1789	0.0000
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	1.0000

Tabla 3
Caso de Estudio Dos

•Modelo de estado de los componentes

Componente 1

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & -.4 \\ 0 & 0 & -.6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad c_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & .1 & 0 \\ 0 & 0 & .5 \end{bmatrix}$$

Componente 2

$$a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Componente 3

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ .4 & .6 \end{bmatrix} \quad c_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \end{bmatrix} \quad d_3 = \begin{bmatrix} .5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Componente 4

$$a_4 = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_4 = \begin{bmatrix} -3.5 & -3.5 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad d_4 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Tabla 3
Caso de Estudio Dos (Continuación)

•Modelo de conexión

$$L_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad L_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad L_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad L_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

•Resultados

1. Realización mínima para los tres procedimientos

MGM1

$$Fm = \begin{vmatrix} -0.3258 & -0.5848 & 0.0190 & 0.0512 & -0.9534 & -0.7617 & -3.2554 \\ 0.4842 & 0.3479 & 0.0926 & -0.3643 & -0.6651 & -0.0801 & -1.6275 \\ -0.1299 & -0.2623 & 0.1288 & -0.0460 & -0.6427 & 1.1873 & -1.4250 \\ 0.0000 & 0.4784 & 0.0695 & 0.5264 & -0.9914 & -0.4792 & -2.0266 \\ 0.0000 & -0.0316 & 1.0533 & -0.0921 & 1.0586 & 0.0641 & 0.9386 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5456 & 0.7207 & 0.7253 & -4.2664 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2687 & -1.4632 & 0.1071 & -2.8612 \end{vmatrix} \quad Gm = \begin{vmatrix} -0.4637 & -0.0831 \\ -0.1747 & -0.4603 \\ 0.8686 & -0.1370 \\ 0.0000 & 0.0910 \\ 0.0000 & 0.8258 \\ 0.0000 & 0.0200 \\ 0.0000 & -0.6796 \end{vmatrix}$$

$$Hm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.3985 & 0.5561 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1511 & 5.1456 \end{vmatrix} \quad Jm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{vmatrix}$$

MGM2

$$Fm = \begin{vmatrix} -0.3258 & -0.5848 & 0.0190 & 0.0512 & -0.9534 & -0.7617 & -3.2554 \\ 0.4842 & 0.3479 & 0.0926 & -0.3643 & -0.6651 & -0.0801 & -1.6275 \\ -0.1299 & -0.2623 & 0.1288 & -0.0460 & -0.6427 & 1.1873 & -1.4250 \\ 0.0000 & 0.4784 & 0.0695 & 0.5264 & -0.9914 & -0.4792 & -2.0266 \\ 0.0000 & -0.0316 & 1.0533 & -0.0921 & 1.0586 & 0.0641 & 0.9386 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5456 & 0.7207 & 0.7253 & -4.2664 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.2687 & -1.4632 & 0.1017 & -2.8612 \end{vmatrix} \quad Gm = \begin{vmatrix} -0.4637 & -0.0831 \\ 0.1747 & -0.4603 \\ 0.8686 & -0.1370 \\ 0.0000 & 0.0910 \\ 0.0000 & 0.8258 \\ 0.0000 & -0.0200 \\ 0.0000 & -0.6796 \end{vmatrix}$$

$$Hm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.3985 & 0.5561 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1511 & 5.1456 \end{vmatrix} \quad Jm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{vmatrix}$$

MGM3

$$Fm = \begin{vmatrix} 0.1426 & -0.5987 & -0.4743 & -0.1136 & 0.5061 & 0.9185 & 0.4569 \\ 0.4616 & -0.3138 & -0.0261 & -0.1854 & -0.2388 & -0.4538 & -2.0257 \\ 0.1029 & 0.0751 & 0.2363 & -0.0062 & -0.2778 & 1.0749 & -0.5722 \\ 0.0000 & 0.2814 & 0.1769 & 0.6670 & 1.2724 & 0.4021 & 2.1513 \\ 0.0000 & -0.0503 & 0.9899 & 0.0527 & 0.9376 & 0.1236 & 0.7670 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.6432 & 0.3777 & 0.7090 & -4.0873 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1322 & -1.8380 & 0.0721 & -2.7787 \end{vmatrix} \quad Gm = \begin{vmatrix} 0.3996 & -0.1173 \\ -0.1597 & 0.1104 \\ 0.9146 & 0.0364 \\ 0.0000 & 0.1067 \\ 0.0000 & 0.8250 \\ 0.0000 & -0.1201 \\ 0.0000 & -0.8374 \end{vmatrix}$$

Tabla 3
Caso de Estudio Dos (Continuación)

$$Hm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.3591 & 0.2231 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0724 & 4.1899 \end{vmatrix} \quad Jm = \begin{vmatrix} 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{vmatrix}$$

2. Matriz de similitud entre MGM1(MGM2)&MGM3

$$T = \begin{vmatrix} -0.6101 & 0.6475 & -0.1274 & 0.0984 & 0.0049 & 0.1100 & 0.2411 \\ 0.0000 & -0.5750 & -0.2914 & -0.1716 & 0.0086 & 0.1918 & 0.4203 \\ 0.0000 & -0.0384 & 0.9430 & -0.0742 & 0.0037 & 0.0830 & 0.1818 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9695 & 0.0986 & -0.0578 & -0.1266 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0986 & 0.9951 & 0.0029 & 0.0064 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.9662 & -0.1624 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0143 & 0.8095 \end{vmatrix}$$

Análisis de Resultados

En todos los casos de estudio desarrollados se obtiene que los MGM1 y MGM2, o son exactamente iguales (como en el Caso Dos), o sólo se diferencian en su ordenamiento (como en el Caso Uno), esto último se evidencia en la naturaleza binaria de la matriz T. En cuanto al MGM3, éste es equivalente con los MGM obtenidos en los otros niveles.

Estos resultados son explicables; en primer lugar, la igualdad (salvo un reordenamiento) entre MGM1 y MGM2 proviene de la propia definición del modelo compuesto. En efecto, éste no es más que el agregado por bloques de los modelos de los componentes, así los posibles estados redundantes se transfieren desde los componentes hasta el modelo compuesto que luego, mediante el proceso de RM a este nivel, se remueven formando el MCCM. Por otra parte, si la RM se realiza a nivel de los componentes, los estados redundantes de cada uno de ellos se eliminan y sus modelos mínimos se componen por bloques para formar el MCMC. Estos dos modelos, MCCM y MCMC, resultan pues iguales o, en el "peor de los casos", con un orden diferente producto del algoritmo de RM.

En segundo lugar, con respecto a la equivalencia de los modelos anteriores con el MGM3, hay que tomar en cuenta que en la práctica el modelo de estado del sistema global es de tamaño aprecia-

ble, con matrices no dispersas por lo general y difíciles de manejar. Estas características hacen difícil explicar la relación de equivalencia obtenida. Afortunadamente, existen ciertas formas estructurales especiales, las estructuras jerárquicas [8], que ayudan a superar en gran parte estas dificultades. En efecto, considere la existencia de una estructura jerárquica *serie-paralelo*, obtenida mediante un reordenamiento apropiado de los componentes [11]; en ésta situación la matriz L_{11} tiene forma estrictamente triangular por bloques. Además, ya que las matrices del modelo de componentes compuesto (5) son diagonales por bloques, se tiene que F es de la forma $F = A + E$, donde $E = B(I-L_{11}D)^{-1}L_{11}C$, también es estrictamente triangular inferior por bloques. En este caso, las ecuaciones (8) tienen la forma particionada:

$$\begin{vmatrix} x_1^o \\ x_2^o \\ x_3^o \\ \vdots \\ x_n^o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ E_{21} & A_2 & 0 & & & \\ E_{31} & E_{32} & A_3 & \cdot & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & & \\ E_{n1} & E_{n2} & E_{n3} & \dots & E_{n,n-1} & A_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \end{vmatrix}$$

$$y = \begin{vmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & 0 & \dots & H_{n-1} & H_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u \end{vmatrix}$$

Ya que F es triangular, con las A_i matrices componentes sobre la diagonal, tiene los mismos autovalores de los componentes individuales y asociados con los modos del sistema compuesto (redundantes o no). Así, el proceso de RM a nivel del sistema global es, en esencia, un proceso sobre el modelo de estado de componentes compuesto; remitiéndose el análisis a la situación anteriormente explicada. Obviamente debido al álgebra matricial involucrada en el cálculo del modelo global (9), no se obtiene una mera permutación de filas o columnas sino matrices diferentes pero absolutamente equivalentes mediante la matriz de transformación. Similares resultados se obtienen si la estructura jerárquica es del tipo *multinivel*. Lo interesante del caso es que, salvo contadas excepciones, todo SDI admite una estructura jerárquica [11].

Conclusiones

El MCC constituye una representación completa de un SDI y divide la estructura del sistema en dos contribuciones perfectamente diferenciadas y desacopladas. Siendo el MCC un proceso de descomposición/composición eminentemente algebraico, el modelo global asociado con el sistema original es función exclusiva del agregado de los componentes y del modelo de conexión.

En cuanto a la RM, se obtiene equivalencia entre los tres procedimientos propuestos. Estos resultados son consistentes con los obtenidos por otros métodos de reducción del orden e indican que el MGM resultante es único e independiente del procedimiento seguido para su obtención, es decir que es igual obtener la RM y luego componer que primero componer y luego hallar la RM. La existencia de una estructura jerárquica en el SDI hace más transparente la relación de equivalencia. Esta relación permite el manejo de modelos de mínimo orden aún desde el nivel de los componentes algo sumamente conveniente en el contexto de SDI.

El método de reducción del orden vía RM presenta sus ventajas sobre otros métodos alternos, ya que se garantiza la observabilidad/controlabilidad del modelo resultante preservando así tanto la estructura como las características dinámicas del sistema original.

Agradecimiento

Esta investigación fue financiada por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico de la Universidad de Los Andes, bajo el Código NUTA-C-09-96-C.

Referencias Bibliográficas

1. T. Kailath, "Linear Systems", Prentice Hall, 1980.
2. R.E. Kalman, "Mathematical description of dynamical systems", SIAM J. Control, vol. 1, pp. 152-192, 1963.
3. E.G. Gilbert, "Controllability and observability in multivariable control systems", SIAM J. Control, pp. 128-151, 1963.
4. L.M. Silverman, "Realization of linear dynamical systems", IEEE Trans. Aut. Contr., vol AC-16, pp. 554-567, 1971.
5. D. Siljak, "Large scale dynamical systems", Ed. North Holland, New York, 1973
6. D. Siljak and M.B. Vulccevick, "Large scale systems: stability, complexity, reliability, Journal of Franklin Institute, 301, 49-69 (1978).
7. R.A. Decarlo and R. Saecks, "Interconnected dynamical systems", Marcel dekker, New York, 1981.
8. R.A. Decarlo, "The componente-connection Model for interconnected systems: philosophy, problem formulations and solutions", Large scale systems, 10, 123-138, 1989.
9. R.A. Decarlo, "Sensitivity calculations using the component-connection model, Int. Journal of Circuit theory and applications, 12(3), 1984
10. F. Posso, "Modelado y simulación de sistemas dinámicos complejos: un enfoque estructural", Informe Técnico, Dpto. Ciencias ULA-TACHIRA, 1995.
11. F. Posso, "Estructuras óptimas en sistemas dinámicos interconectados", Revista Técnica de Ingeniería-LUZ, vol 21, N° 1, Abril-1998, pp.27-36.
12. F. Posso, "Modelado y simulación de sistemas dinámicos asistido por computadora",

- Informe Técnico, Dpto. Ciencias, ULA-TACHIRA, 1996.
13. N.R. Sandell, IEEE-TAC, 23, 108, 1978.
14. O. Wasynczuk and R.A. Decarlo, "The component-connection model and structure preserving model order reduction", Automatica, vol 17, 619-626, 1981.
15. A. Feliachi, IEEE TCS, 32, 1081, 1985.
16. A. Feliachi, "Model reduction of large scale interconnected systems", Int. J. Systems., 2249-2259, 18 (12), 1987.
17. L. Zadeh & Ch. Desoer, "Linear System Theory", Ed. McGraw-Hill, 1963.

Recibido el 28 de Febrero de 2000

En forma revisada el 3 de Octubre de 2000