Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 24, Nº 1, 67-75, 2001

# The Durbin-Watson statistic to estimate the instantaneous variance of non-stationary stochastic processes with ARMA structure for noise process

*Egar E. Sánchez C.*[1] *y Carlos Vinante*[2]

[1] *Cátedra de Estadística, Departamento Socioeconómico, Facultad de Ciencias Veterinarias, Apartado 15252. Maracaibo, Venezuela. Fax 596100. E-mail sanchez@telcel.net.ve.*
[2] *Laboratorio de Controles, Escuela de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.*

## Abstract

The Durbin-Watson statistic ($dw$), can be used to instantaneously estimate variance at any moment in a non-stationary stochastic process, for which the random component, $\varepsilon_t$, is white noise. In this case, the method is based on the fact that $dw = 2$. Considering that some practical situations can present more complex noise structures, this paper, proposes the use $dw$ to estimate the variance of non-stationary processes, with ARMA($p,q$) structures for noise processing. In this general case, the method needs to determine $dw$ of the ARMA process. Once the structure of the ARMA model is known and its coefficients are estimated, $dw$ is obtained solving the following system of linear equations: $1/\text{-}\sigma^2\,\gamma = A^{-1} H$, where $\sigma^2$ is the variance of the component $\varepsilon_t$ of the ARMA model, $\gamma$ is the autocovariances vector, $A$ is the square matrix formed by the autoregressive coefficients and $H$, is a vector formed for the autoregressive part and by moving average coefficients. For a ARMA(2,2) process, the system consists of three linear equations with three unknowns. An illustrative example with data generated randomly, shows that the method provides values that are very close to the true variance value.

**Key words:** Non-stationary process, Durbin-Watson statistic and ARMA($p,q$) models.

# El estadístico de Durbin-Watson para estimar la varianza instantánea de procesos estocásticos no estacionarios con estructuras ARMA para el proceso de ruido

## Resumen

El estadístico de Durbin-Watson ($dw$), puede utilizarse para estimar la varianza de manera instantánea en cualquier momento de un proceso estocástico no estacionario, cuya componente aleatoria, $\varepsilon_t$, es ruido blanco. En este caso, el método se basa en que $dw = 2$. Considerando que algunas situaciones prácticas pueden presentar estructuras de ruido más complejas, en este trabajo se propone el uso de $dw$ para estimar la varianza en procesos no estacionarios, con estructuras ARMA($p,q$) para el proceso de ruido. En este caso general, el método requiere determinar $dw$ para el proceso ARMA. Identificada la estructura y estimados los coeficientes del modelo ARMA de ruido, $dw$ se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $1/\text{-}\sigma^2\,\gamma = A^{-1} H$, donde $\sigma^2$ es la varianza de la componente $\varepsilon_t$ del modelo, $\gamma$ es el vector de autocovarianzas, $A$ es la matriz cuadrada formada por los coeficientes autoregresivos y $H$, es el vector de coeficientes de la parte autoregresiva y de medias móviles. Para un proceso ARMA(2,2), se obtiene un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Un ejemplo ilustrativo con datos generados aleatoriamente, muestra que el método proporciona valores cercanos al verdadero valor de la varianza.

**Palabras clave:** Proceso no estacionario, Estadístico de Durbin-Watson y Modelos ARMA($p,q$).

## Introducción

Muchos procesos estocásticos no estacionarios pueden explicarse por la suma de dos componentes: la parte determinística, llamada señal $y$, la variación aleatoria llamada ruido, cuya amplitud es medida por su varianza. El efecto resultante de ambas componentes, es una sucesión de observaciones que fluctúan alrededor del verdadero valor. Por razones de sencillez, es muy común suponer, que las perturbaciones de la señal producidas por el proceso de ruido son independientes, con media cero, varianza constante y distribuidas normalmente. El modelo autoregresivo de primer orden, también se ha considerado razonable para describir el ruido y su uso se ha mantenido en el tiempo [1], pero es obvio que, en el análisis práctico, situaciones de autocorrelación más complicadas, se pueden presentar con frecuencia. Un modelo general, que puede describir cualquier proceso de ruido, es el modelo ARMA($p,q$).

El uso generalizado de analizadores automáticos, instrumentos para el registro automático de mediciones y la alta velocidad-capacidad de procesamiento del computador, han incrementado el volumen de datos y modificado el análisis de un proceso estocástico a una manera más operacional, como por ejemplo, la estimación de un modelo en cada instante de tiempo, para predecir observaciones futuras según cambios recientes observados o detectar cambios en el patrón de comportamiento de la serie, para tomar decisiones correctivas inmediatas.

En muchas situaciones reales [2], el monitoreo de un proceso no estacionario, muestra que la varianza del ruido que contamina la señal, cambia frecuentemente. Cuando es necesario tomar decisiones instantáneas para adaptar un filtro y eliminar el ruido presente en la señal, se requiere estimar la varianza en el mismo momento en que los datos se están recibiendo en cada instante de tiempo. Russell [2] propone en estos casos como alternativa, un método aproximado, que contempla la estimación de la varianza por una expresión, basada en las desviaciones entre observaciones consecutivas del proceso y válida, para procesos con ruido blanco gaussiano.

La expresión propuesta por Russell [2], surge de el estadístico de Durbin-Watson ($dw$), usado para probar la presencia de autocorrelación de primer orden en los residuales de una ecuación de regresión. Se han realizado diversos estudios adicionales sobre este estadístico, la prueba se ha generalizado para autocorrelación de cualquier orden [3,4] y muchos otros estudios que amplían su aplicación, pero generalmente, en el contexto de residuales, modelos de regresión y series de tiempo [5-15], por lo tanto, su utilidad práctica para estimar la varianza es otra importante aplicación de $dw$.

Conocida entonces, la importancia práctica de $dw$, en el cálculo instantáneo de la varianza de procesos no estacionarios con ruido blanco gaussiano y la posibilidad de encontrar procesos de ruido con estructuras más complejas, el objetivo del presente trabajo es proponer el estadístico de Durbin-Watson, para estimar la varianza en procesos estocásticos no estacionarios, con estructuras de modelos ARMA para el proceso de ruido.

## Consideraciones Preliminares

En muchas situaciones prácticas, el monitoreo de un proceso no estacionario $Z_t$, muestra que la varianza del ruido que contamina la señal, cambia frecuentemente. Cuando es necesario tomar decisiones instantáneas para adaptar un filtro y eliminar el ruido presente en la señal, se requiere estimar la varianza en cada momento $t$. Russell [2], propone en estos casos como alternativa, la siguiente expresión:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\rho}^2}{2} \text{ donde: } \hat{\rho}^2 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(z_t - z_{t-1})^2}{n-1} \qquad (1)$$

Esta expresión es válida para procesos con ruido blanco gaussiano e intervalos de muestreo pequeños, en comparación con los cambios reales de los niveles del proceso. Planteando además, que para $3 \leq n \leq 15$ (recomendando $n = 5$) la ecuación responderá bastante bien a los cambios de varianza del proceso, con valores estimados muy cercanos a los reales. Russell [2] además propone, que el valor de la varianza puede mantenerse actualizado, calculando $\hat{\rho}^2$ por el siguiente modelo de suavizado exponencial.

$$\hat{\rho}_t^2 = \frac{1}{n}(z_t - z_{t-1})^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\hat{\rho}_{t-1}^2 \qquad (2)$$

La proposición de Russell se basa en que, en el límite, para n grande, en un proceso estacionario, con desviaciones aleatorias distribuidas simétricamente, $\sigma^2$ y $\rho^2$ se relacionan así:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum Z_t^2 \qquad (3)$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho^2 = \frac{2}{n}\sum Z_t^2 \qquad (4)$$

donde $Z_t = (z_t - \bar{z})$. De acuerdo con esto, en el límite, la varianza del proceso está dada por $\sigma^2 = \rho^2/2$ y puede ser calculada cuando $\rho^2$ es conocido.

## Planteamiento del Problema

La expresión (1) surge de el estadístico de Durbin-Watson, usado para detectar autocorrelación de primer orden en los errores de un modelo de regresión, los cuales se suponen, variables aleatorias independientes, con media cero y varianza constante [16]. La expresión para $dw$ es:

$$dw = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad (5)$$

El desarrollo del numerador de la expresión anterior, genera otra expresión aproximada y muy útil para $dw$, ésta es:

$$dw \cong 2(1 - r_1) \qquad (6)$$

Siendo $r_1$ el coeficiente de autocorrelación estimado de primer orden, el estadístico tiene un rango de 0 a 4. Cuando los errores son independientes:

$$dw \cong 2. \qquad (7)$$

Para apreciar la coincidencia entre $dw$ y la expresión propuesta por Russell, la ecuación (5) puede también escribirse de la siguiente manera:

$$dw = \frac{p^2}{s^2} \text{ donde: } p^2 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{n-1} \text{ y } s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-1} \qquad (8)$$

Igualando (7) y (8).

$$\frac{p^2}{s^2} = 2 \Rightarrow s^2 = \frac{p^2}{2} \text{ donde: } p^2 = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{n-1} \qquad (9)$$

Comparando (9) con (1), se observa que la expresión de Russell es $dw$, aplicado de manera secuencial, a las $n$ últimas observaciones de un proceso estocástico $Z_t$. El proceso $Z_t$, estaría representado por el modelo: $Z_t = M_t + \varepsilon_t$, donde $M_t$ es la componente determinística y $\varepsilon_t$ es ruido blanco gaussiano.

En este trabajo, será considerado para el proceso de ruido, la estructura del modelo ARMA($p,q$). El ruido llamado ahora $X_t$, estará dado por:

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \ldots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t - b_1\varepsilon_{t-1} -$$

$$b_2\varepsilon_{t-2} - \ldots - b_q\varepsilon_{t-q} \qquad (10)$$

y el modelo del proceso a ser considerado será: $Z_t = M_t + X_t$, donde $M_t$, igual que antes, es la componente determinística. $X_t = \varepsilon_t$ es el caso particular propuesto por Russell y dado por (1) y $X_t$ igual a (10), es el caso general que se desea determinar.

Después de los planteamientos anteriores, el objetivo del presente trabajo es proponer el estadístico de Durbin-Watson, para estimar la varianza en procesos no estacionarios con estructuras de modelos ARMA para el proceso de ruido.

Para ilustrar el planteamiento hecho por Russell [2], es necesario considerar primero un proceso de ruido blanco $Z_t = \varepsilon_t$, por lo tanto, $E(Z_t) = 0 \ \forall \ t$ y $V(Z_t) = \sigma^2 \ \forall \ t$.

Sea $D_t$ un nuevo proceso originado de tomar la primera diferencia del proceso $Z_t$, entonces:

$D_t = Z_t - Z_{t-1}$ con $t = 2, 3, 4, \ldots$

La media y la varianza de este nuevo proceso serán:

$$E(D_t) = E(Z_t - Z_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0 \quad (11)$$

$$V(D_t) = V(Z_t - Z_{t-1}) = \sigma^2 + \sigma^2 = 2\sigma^2 \quad (12)$$

Por otro lado:

$$V(D_t) = E\,[D_t - E(D_t)]^2 = E\,[D_t]^2 \text{ y}$$
$$E\,[D_t]^2 = E(Z_t - Z_{t-1})^2 = \rho^2 \quad (13)$$

Igualando (12) y (13) se tiene que:

$$2\sigma^2 = \rho^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\rho^2}{2} \quad (14)$$

Considerando ahora, un proceso estocástico no estacionario representado por el modelo $Z_t = M_t + \varepsilon_t$, donde $M_t$ es la componente determinística, la cual puede ser cualquier función del tiempo y $\varepsilon_t$, ruido blanco.

La media y la varianza de $Z_t$ son respectivamente:

$$E(Z_t) = E(M_t + \varepsilon_t) = E(M_t) + E(\varepsilon_t) = M_t \quad (15)$$

$$V(Z_t) = V(M_t + \varepsilon_t) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad (16)$$

Sea $D_t$ un nuevo proceso originado de tomar la primera diferencia del proceso $Z_t$, entonces: $D_t = Z_t - Z_{t-1}$ con t = 2, 3, 4,...

Igualmente:

$$D_t = M_t + \varepsilon_t - (M_{t-1} + \varepsilon_{t-1}) = (M_t - M_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})$$

La media del proceso $D_t$ es:

$$E(D_t) = E\,[(M_t - M_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})] = M_t - M_{t-1} \quad (17)$$

Para intervalos de muestreo muy pequeños:

$$M_t \cong M_{t-1} \text{ y así } E(D_t) \cong 0 \quad (18)$$

Tomando en cuenta (18) la varianza del proceso $D_t$ será:

$$V(D_t) = E\,[D_t - E(D_t)]^2 = E\,[D_t^2] \text{ y}$$
$$E\,[D_t]^2 = E(Z_t - Z_{t-1})^2 = \rho^2 \quad (19)$$

Por el otro lado:

$$V(D_t) = V(Z_t - Z_{t-1}) = V[(M_t - M_{t-1}) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})]$$
$$= V(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = 2\sigma^2 \quad (20)$$

Igualando (19) y (20) se tiene:

$$2\sigma^2 = \rho^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\rho^2}{2}$$

Comparando las dos secuencias anteriores, se observa que la propuesta de Russell consiste en que, para observaciones muy cercanas, el proceso $Z_t = M_t + \varepsilon_t$ se aproxima a $Z_t = \varepsilon_t$, permitiendo obtener una aproximación del estimado de la varianza. El caso general corresponde entonces a un proceso representado por $Z_t = M_t + X_t$, donde ahora el ruido $X_t$ es un proceso ARMA($p,q$) con $E(X_t) = 0 \;\forall\; t$ y varianza $V(X_t) = \sigma_x^2$. Entonces:

$$E(Z_t) = E(M_t + X_t) = M_t \text{ y } V(Z_t) = V(M_t + X_t)$$
$$= V(X_t) = \sigma_x^2 \quad (21)$$

Siendo $D_t = Z_t - Z_{t-1}$, por (18) $E(D_t) \cong 0$ y por (19) $V(D_t) = \rho^2$

Pero ahora:

$$V(D_t) = V(Z_t - Z_{t-1}) = V[(M_t - M_{t-1}) + (X_t - X_{t-1})]$$
$$= V(X_t - X_{t-1})$$

y

$$V(X_t - X_{t-1}) = V(X_t) + V(X_{t-1}) - 2\text{cov}(X_t, X_{t-1})$$

entonces:

$$\rho^2 = 2\sigma_x^2 - 2\text{cov}(X_t, X_{t-1}) \quad (22)$$

Dividiendo ambos lados por la varianza, $\sigma_x^2$, del proceso ARMA($p,q$), se tiene:

$$\frac{\rho^2}{s_x^2} = 2 - \frac{2\text{cov}(x_t, x_{t-1})}{\sigma_x^2} \Rightarrow \frac{\rho^2}{\sigma_x^2} = 2(1 - R_1) \quad (23)$$

Por lo tanto, la varianza del proceso $Z_t$ será:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{DW} \cdot \rho^2 \quad (24)$$

Para $n$ observaciones del proceso, $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, el problema consiste entonces, en estimar el factor $1/DW$, usando $1/dw$, para el cual habrá que determinar el valor estimado $\hat{R}_1 = r_1$ en un proceso ARMA($p,q$).

## Solución del Problema

El valor de $\hat{R}_1$ puede ser obtenido, partiendo de la función de autocovarianzas del proceso ARMA dada por Cryer [17].

$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_p\gamma_p - \sigma^2(-1 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_q)$$

$$\gamma_1 = a_1\gamma_0 + a_2\gamma_1 + \ldots + a_p\gamma_{p-1} - \sigma^2(b_1 + b_2\varphi_1 + b_3\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_{q-1})$$

.

.

.

$$\gamma_p = a_1\gamma_{p-1} + a_2\gamma_{p-2} + \ldots + a_p\gamma_0 - \sigma^2(b_q + b_{q+1}\varphi_1 + b_{q+2}\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_{q-p})$$

Siendo $\sigma^2 = V(\varepsilon_t)$, y

$$\varphi_0 = 1$$

$$\varphi_1 = -b_1 + a_1$$

$$\varphi_2 = -b_2 + a_2 + a_1\varphi_1$$

.

.

.

$$\varphi_j = -b_j + a_p\varphi_{j-p} + \ldots + a_1\varphi_{j-1}$$

donde: $\varphi_j = 0$ para $j < 0$ y $b_j = 0$ para $j > q$.

Haciendo:

$$H_0 = (-1 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_q)$$

$$H_1 = (b_1 + b_2\varphi_1 + b_3\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_{q-1})$$

.

.

.

$$H_q = (b_q + b_{q+1}\varphi_1 + b_{q+2}\varphi_2 + \ldots + b_q\varphi_{q-p})$$

Llegamos a:

$$\gamma_0 - a_1\gamma_1 - a_2\gamma_2 - \ldots - a_p\gamma_p = -\sigma^2 H_0$$

$$\gamma_1 - a_1\gamma_0 - a_2\gamma_1 - \ldots - a_p\gamma_{p-1} = -\sigma^2 H_1$$

.

.

.

$$\gamma_p - a_1\gamma_{p-1} - a_2\gamma_{p-2} - \ldots - a_p\gamma_0 = -\sigma^2 H_q$$

Llamando $A$ a la matriz de los coeficientes $a_p$ y $\gamma$ al vector columna de covarianzas, se tiene:

$$A\gamma = -\sigma^2 H \Rightarrow \frac{1}{-\sigma^2}\gamma = A^{-1}H \qquad (25)$$

Donde la matriz $A$ tiene la forma general que puede observarse en la Figura 1.

Resolviendo el sistema, se obtienen los cocientes $\gamma_p / -\sigma^2$ y luego:

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & & & & & \ldots & -a_p \\
-a_1 & (1-a_2) & -a_3 & -a_4 & & & & \ldots & -a_p & \\
-a_2 & -(a_1+a_3) & (1-a_4) & -a_5 & \ldots & & -a_{p-1} & -a_p & & \\
\cdot & \cdot\ \ \cdot & -(a_1+a_5) & (1-a_6) & \ldots & -a_{p-1} & -a_p & & & \\
\cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & -(a_1+a_7) & \ldots & -a_p & & & & \\
\cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & :\ \ : & & 1 & & & & \\
 & & \cdot\ \ \cdot & -(a_{p-6}+a_p) & & -a_1 & 1 & & & \\
 & & -(a_{p-4}+a_p) & \cdot & & : & -a_1 & 1 & & \\
 & -(a_{p-2}+a_p) & -a_{p-3} & : & & . & : & -a_1 & 1 & \\
-a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & -a_{p-3} & -a_{p-4} & -a_{p-5} & -a_{p-6} & \ldots & & 1
\end{array}$$

Figura 1. Forma general de la matriz $A$.

$$R_1 = \frac{\gamma_1 / -\sigma^2}{\gamma_0 / -\sigma^2} \qquad (26)$$

Identificada la estructura y estimados los coeficientes del modelo ARMA de ruido, basándose en la serie observada $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$, un valor estimado $\hat{R}_1$ se podrá obtener por la expresión (26).

Considerando que muchas situaciones prácticas son descritas satisfactoriamente por modelos ARMA con $p$ y $q \le 2$ [18], para una estructura ARMA(2,2) el sistema de ecuaciones es:

$$1/-\sigma^2 \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 \\ -a_1 & (1-a_2) & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

En este caso:

$\varphi_1 = -b_1 + a_1$ y $\varphi_2 = -b_2 + a_2 - a_1 b_1 + a_1^2$

$H_0 = -1 - b_1^2 + a_1 b_1 - b_2^2 + a_2 b_2 - a_1 b_1 b_2 + b_2 a_1^2$,

$H_1 = b_1 - b_1 b_2 + b_2 a_1$ y $H_2 = b_2$

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\frac{\gamma_0}{-\sigma^2} = \frac{(1+a_2)a_1 H_1 + (a_2 H_2 + H_0)(1-a_2)}{(1+a_2)\left((1-a_2)^2 - a_1^2\right)},$$

$$\frac{\gamma_1}{-\sigma^2} = \frac{a_1 a_2 H_2 + a_1 H_0 + (1-a_2^2)H_1}{(1+a_2)\left((1-a_2)^2 - a_1^2\right)}$$

$R_1$ se obtiene por el cociente $\frac{\gamma_1 / -\sigma^2}{\gamma_0 / -\sigma^2}$ y después:

$$DW = 2\left[1 - \frac{a_1 a_2 H_2 + a_1 H_0 + (1-a_2^2)H_1}{(1+a_2)a_1 H_1 + (a_2 H_2 + H_0)(1-a_2)}\right] \qquad (27)$$

Así, la varianza del proceso ARMA(2,2) vendrá dada por la ecuación (28) que se muestra en el recuadro:

Una expresión muy utilizada es la del proceso ARMA(1,1), para este caso, $a_2$ y $H_2 = b_2$, son iguales a cero, por lo que:

$$\sigma_x^2 = \frac{H_0 + a_1 H_1}{2\left((H_0 - H_1)(1-a_1)\right)} \cdot \rho^2 \qquad (29)$$

donde $\varphi_1 = -b_1 + a_1 \Rightarrow H_0 = -1 - b_1^2 + a_1 b_1$ y $H_1 = b_1$

De manera similar pueden obtenerse expresiones para otros modelos ARMA.

Para un proceso de ruido AR($p$), el sistema de ecuaciones dado por (25) pasa a ser:

$$\frac{\gamma}{-\sigma^2} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (30)$$

Para un proceso MA($q$), la matriz $A$ es la matriz identidad y el vector $H$ es:

$H_0 = (-1 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_q^2)$

$H_1 = (b_1 - b_2 b_1 - b_3 b_2 - \ldots - b_q b_{q-1})$

.

.

.

$H_q = b_q$

De tal manera que, la varianza de un proceso MA($q$) viene dada por:

$$\sigma_x^2 = \frac{-1 - b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_q^2}{2(-1 - b_1 - b_1^2 - b_2^2 + b_2 b_1 - \ldots - b_q^2 + b_q b_{q-1})} \cdot \rho^2 \qquad (31)$$

## Ejemplo

Con el propósito de ilustrar el resultado de estimar la varianza en un proceso estocástico $Z_t = M_t + X_t$, utilizando la expresión encontrada en (29), se presenta un ejemplo con datos generados artificialmente [19, 20]. La parte superior de la Figura 2, simula 198 observaciones de una serie

$$\sigma_x^2 = \frac{(H_0 + a_2 H_2)(1-a_2) + (1+a_2)a_1 H_1}{2\left((1-a_1-a_2)H_0 - (1-a_1-a_2^2-a_1 a_2)H_1 + (a_2 - a_2^2 - a_1 a_2)H_2\right)} \cdot \rho^2 \qquad (28)$$

de tiempo, la línea continua, es la componente determinística $M_t$ y describe el camino que seguiría la serie de tiempo, en caso de no existir variabilidad. Esta línea está dada por la función: $M_t = 10 + 2.\text{sen}(\pi.t/30) + t/5$ hasta el momento $t = 159$ y de allí en adelante por: $M_t = 20 + 20.e^{-t}.\text{sen } t$.

Las fluctuaciones superpuestas alrededor de $M_t$ representan el ruido o perturbaciones aleatorias que distorsionan la señal. El ruido $X_t$ utilizado en la simulación fue un proceso ARMA(1, 1) dado por: $X_t = 0.80\, X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.30\varepsilon_{t-1}$, con varianza para la componente aleatoria, $\varepsilon_t$, igual a $\sigma^2 = 1.5$ hasta el momento $t = 80$, después del cual, se cambió a $\sigma^2 = 3$. De esta manera, las varianzas teóricas del proceso de ruido serán $\sigma_x^2 = 2.54$ hasta $t = 80$ y después, $\sigma_x^2 = 5.07$.

Puede apreciarse también en la Figura 2 que, la serie de tiempo desde $t = 1$ hasta $t = 80$, aumenta 6 unidades y después, aumenta 12 unidades hasta llegar a $t = 160$. Luego, la señal cae bruscamente y se estabiliza hasta el final. El incremento de la serie por unidad de tiempo hasta $t = 80$, es aproximadamente de 0.075 unidades y de allí hasta $t = 160$ es de 0.15 unidades, por esta razón, para el cálculo de los estimados de varianza, se decidió usar intervalos de muestreo igual a 0.05 unidades de tiempo. El primer valor estimado $\hat{\rho}^2$ se obtuvo con las primeras 60 observaciones, expresión (1), de allí en adelante, de manera secuencial, se obtuvo por (2). El valor $n = 60$ fue seleccionado, tomando en cuenta que es el mínimo recomendado para la identificación de un modelo ARMA [21].

La parte inferior de la Figura 2 muestra las varianzas estimadas en cada instante $t$, usando la expresión (29) y la expresión propuesta por Russell. Puede notarse como los valores estimados a partir de (29), se encuentran alrededor de los valores reales, por lo tanto, en promedio se aproximan a $\sigma_x^2 = 2.54$ y $\sigma_x^2 = 5.07$. Más abajo, se

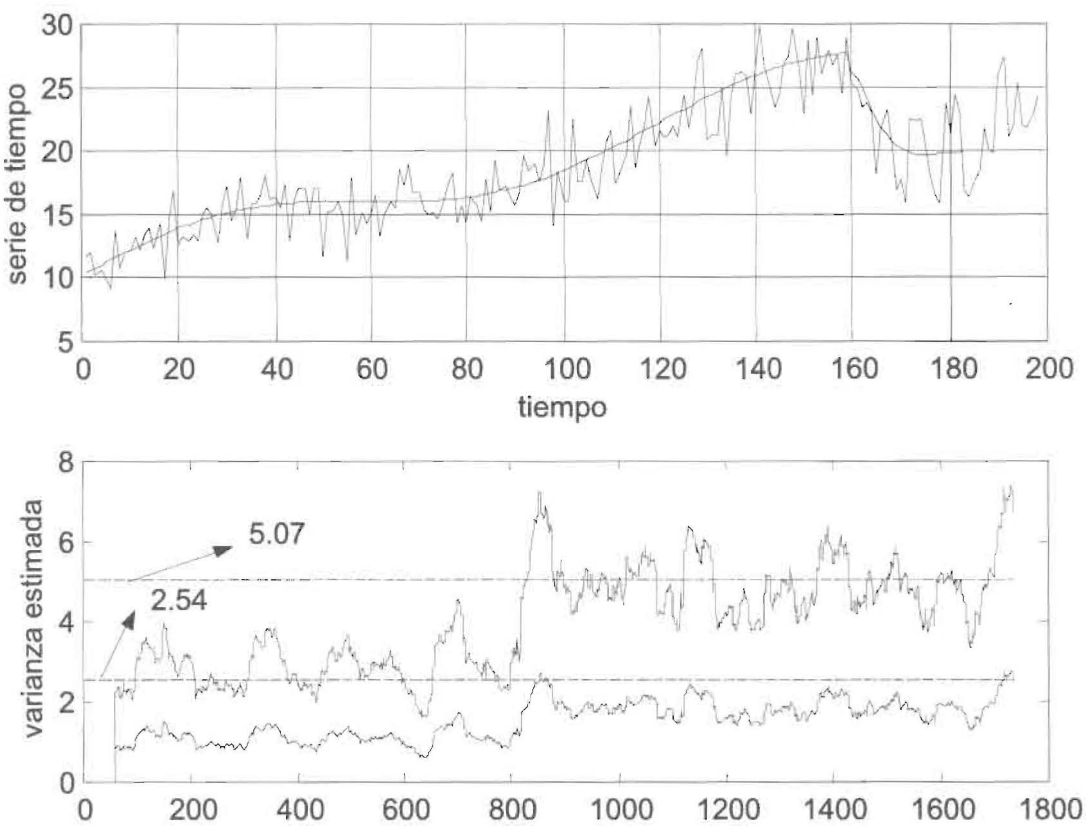


Figura 2. Serie de tiempo con ruido igual a $X_t = 0.80X_{t-1} + \varepsilon_t - 0.30\varepsilon_{t-1}$ y varianza estimada usando la expresión (29). Datos generados artificialmente.