

Mathematical models to incorporate the in-plane flexibility of slabs in the seismic analysis of reinforced concrete buildings

Miguel Rodríguez T.¹ y Oscar A. López²

¹Universidad Católica Andrés Bello. Caracas, Venezuela.

²IMME, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Apartado Postal 50.361. Caracas 1050-A, Venezuela. E-mail: oslopez@reacciun.ve

Abstract

Recent earthquake resistant codes recommend incorporating the in-plane flexibility of the slabs for the analysis of buildings that have irregular plans in order to reach a more accurate determination of the design forces. For irregular section slabs such as the one-way T-section slabs of reinforced concrete, this paper identifies the main parameters that influence their in-plane flexibility. By means of parametric studies analytical expressions are proposed to determine the thickness of an equivalent flat slab so that its flexibility represents the one of the irregular section. For the typical one-way T slab of height equal to 25 cm it is found that the equivalent thickness varies between 6 and 7 cm. The minimum number of plane finite elements to be incorporated in the analysis is determined by means of parametric analysis. When the total number of the finite elements in all the slabs is greater than 16, the error is less than 7%. The proposed model to represent the in-plane flexibility of the slab is applied for the seismic analysis of a four-story building; when the typical model of rigid diaphragm is used, the errors in the calculation of the forces at the resisting elements are as large as 25%.

Key words: Flexibility of diaphragms, seismic analysis, concrete buildings, mathematical models.

Modelos para incorporar la flexibilidad del diafragma en la respuesta sísmica de edificios de concreto armado con losa nervada

Resumen

Normas recientes para el diseño sísmico de edificios irregulares de planta, recomiendan la incorporación de la flexibilidad del sistema de piso en su propio plano con el fin de una determinación más precisa de las fuerzas sobre la estructura. Para las losas de concreto armado de sección transversal irregular, tales como las losas nervadas en una dirección, se han identificado las variables principales que influyen su flexibilidad. Mediante estudios paramétricos se han desarrollado expresiones analíticas para determinar el espesor de una losa maciza equivalente que permite aproximar la flexibilidad en el plano de la geometría irregular a una geometría plana de espesor constante. Para una losa nervada convencional de 25 cm de altura, se ha encontrado que el espesor equivalente varía generalmente entre 6 y 7 cm. Esta aproximación permite adoptar un modelo simplificado constituido de elementos finitos (EF) planos de espesor constante para modelar la flexibilidad de la losa de sección transversal irregular en el análisis sísmico de edificios. Adicionalmente, mediante análisis paramétricos se ha encontrado que al incorporar un total de 16 EF en el modelo de diafragma de los edificios analizados, se incurre en errores inferiores al 7% con relación a los modelos que incorporan una densidad de malla 16 veces superior. El modelo propuesto para in-

corporar la flexibilidad del diafragma se aplicó al caso de un edificio de cuatro pisos, encontrándose que la idealización comúnmente utilizada del diafragma rígido incurre en errores del 25% en el cálculo de las fuerzas de diseño.

Palabras clave: Flexibilidad del diafragma, análisis sísmico, edificios de concreto, modelos matemáticos.

Introducción

La idealización del diafragma infinitamente rígido en su plano para el análisis de edificios sujetos a la acción de movimientos sísmicos simplifica notablemente el análisis estructural. Sin embargo, en algunas edificaciones, la idealización del diafragma infinitamente rígido puede ser inapropiada y la flexibilidad del diafragma debe ser incorporada en el análisis estructural. Varias publicaciones en revistas de ingeniería sísmica, dinámica estructural, y trabajos presentados en congresos internacionales de ingeniería sísmica en las últimas dos décadas, han tratado el tema de la flexibilidad de los diafragmas de piso. Sin embargo solo algunos autores han evaluado los modelos empleados para cuantificar el efecto de la flexibilidad del diafragma, tal es el caso de: Unemori, Roesset y Becker [1], S. Jain y P. Jennings [2], N. Panahshahi, A.M. Reinhorn y S.K. Kunnath [3, 4], Masayoshi Nakashima, Ti Huang, y Le-Wu Lu [5, 6], H. Faruk Karadogan [7]. No obstante, los autores referidos anteriormente no presentan recomendaciones y/o conclusiones generales para el modelaje de los diafragmas que permitan efectuar el análisis que a veces es exigido por las normas modernas para el diseño sísmico de edificios. Adicionalmente en estos trabajos no se presentan las consideraciones para tratar los tipos de losas nervadas típicas en varios países latinoamericanos. En respuesta, el presente trabajo pretende: a) Presentar métodos y recomendaciones para modelar la flexibilidad en el plano de las losas nervadas, tratadas como sistemas elásticos con desplazamientos pequeños, b) presentar recomendaciones en cuanto al número de elementos finitos mínimos que deben incorporarse en un modelo de diafragma en losas macizas y nervadas, y c) evaluar en un edificio típico los efectos de considerar la flexibilidad del diafragma. Una presentación más detallada de los resultados de esta investigación se presenta en Rodríguez [8].

Evaluación de un Modelo Basado en la Teoría de Vigas

La teoría de vigas constituye una alternativa comúnmente utilizada, debido a su sencillez, para modelar la flexibilidad en el plano de los sistemas de piso, por lo cual conviene investigar su rango de validez. El proceso de evaluación se enfoca en comparar las deflexiones obtenidas en el centro del tramo de un grupo de paños aislados sometidos a carga distribuida uniformemente en el plano, modelando las losas con mallas de elementos finitos y con vigas simplemente apoyadas que consideran las deformaciones por flexión y corte. En esta publicación se presenta la evaluación particularmente para la dirección de flexión perpendicular a los nervios.

El cálculo de la deflexión en el centro del tramo usando la teoría de vigas se hace a través de la Ec. 1. El soporte a la Ec. 1 puede encontrarse en Timoshenko y Gere [9].

$$Y_{TV} = (5 q b^4)/(384 E I) + (fs q b^2)/(8 G A) \quad (1)$$

Siendo: q =carga uniformemente distribuida (Kgf/cm), b =Luz libre entre apoyos (cm), I = Momento de Inercia de la sección transversal perpendicular a los nervios, alrededor del eje de flexión (cm⁴), A = Área total de la sección transversal perpendicular a los nervios (cm²), E = Módulo de elasticidad del concreto (Kgf/cm²), G = Módulo de corte (Kgf/cm²), fs = Factor de forma $\approx A/\text{Aloseta} = 1.80 - 1.90$ para la losa nervada convencional de altura 25 cm.

El cálculo de las deflexiones con los modelos de elementos finitos se ha llevado a cabo con mallas de elementos finitos tipo "Shell" [10]. Tanto en los modelos constituidos con vigas como en los constituidos con elementos finitos se ha variado la relación largo/ancho de la losa, según se indica en la Figura 1. En el cálculo de las rigideces se consideran las secciones gruesas de los elementos despreciando la contribución del acero de refuerzo.

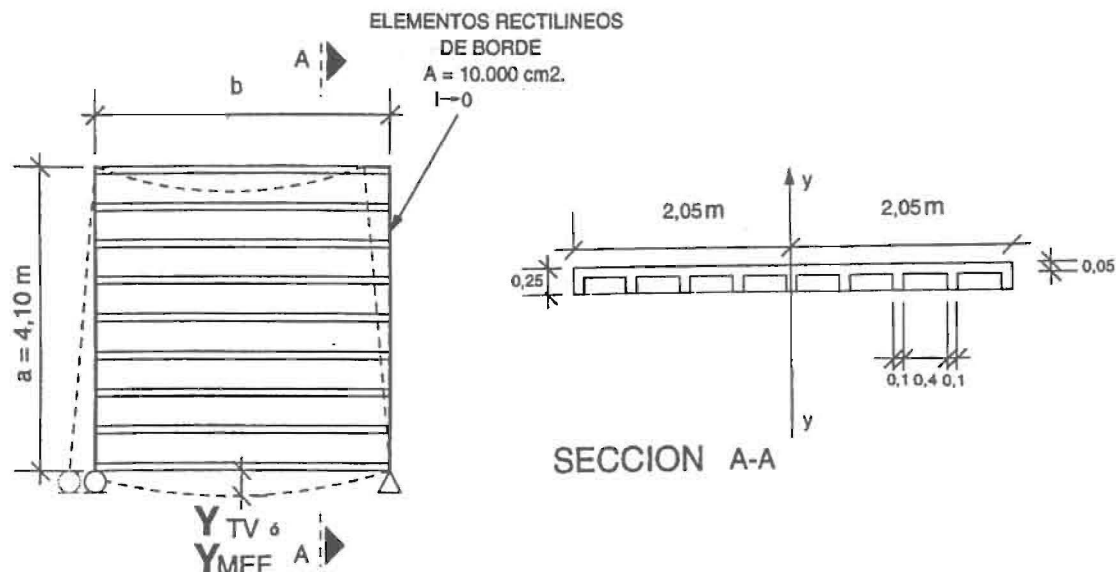


Figura 1. Paños de losas nervadas con relaciones $b/a = 1, 1.5, 2$ y 4 . Modelos con elementos finitos planos y elementos rectilíneos (vigas).

Al comparar los resultados numéricos obtenidos de los modelos constituidos con elementos rectilíneos (vigas) con los obtenidos de los modelos constituidos con elementos finitos, se obtienen diferencias inferiores al 3%. Tomando como premisa que los modelos constituidos con elementos finitos representan de una manera satisfactoria el comportamiento elástico-lineal de las losas de concreto en su propio plano [8], se infiere que la teoría de viga incorporando deformaciones por flexión y corte es adecuada para modelar losas nervadas de planta rectangular en su acción de diafragma.

Espesor Equivalente para Modelar Losas Nervadas

Debido a lo laborioso que resulta generar un modelo con elementos finitos que considere la sección irregular de una losa nervada, se presenta como vía alterna aproximar la geometría irregular de una losa nervada a una geometría plana de losa maciza. La losa maciza quedará definida por lo que será llamado Espesor Equivalente. La estrategia fundamental para determinar el espesor equivalente consiste en igualar la deflexión de la losa nervada cargada uniformemente en su plano con la deflexión de la losa maciza, mediante el uso de la teoría de viga. Ambas deflexiones se

calculan en el centro del tramo, según la dirección de las cargas que están contenidas en el plano de la losa.

Espesor Equivalente para la Flexión en Dirección Perpendicular a los Nervios

Debido a que el diafragma está constituido por una sólida integración entre las losas nervadas y las vigas principales y secundarias que constituyen el sistema estructural, conviene incorporar las vigas en la dirección de los nervios para el cálculo de las propiedades mecánicas de la sección transversal ver secciones 1-1 y 2-2 en la Figura 2.

La Ec. 1 puede ser modificada adicionando el momento de inercia de la sección transversal de las vigas alrededor de la línea neutra al momento de inercia de la sección transversal de la losa. De manera que $I = I_{yyn} + I_v = I_{yy} + I_v$. Siendo $I =$ Momento de Inercia total de la sección transversal de losa + vigas, $I_{yyn} =$ Momento de Inercia de la sección transversal de la losa nervada alrededor de un eje perpendicular al plano de la losa que pasa por el centroide, $I_{yy} =$ Momento de Inercia de la sección transversal de la losa maciza alrededor de un eje perpendicular al plano de la losa que pasa por el centroide $= (e a^3)/12$, $e =$ Es-

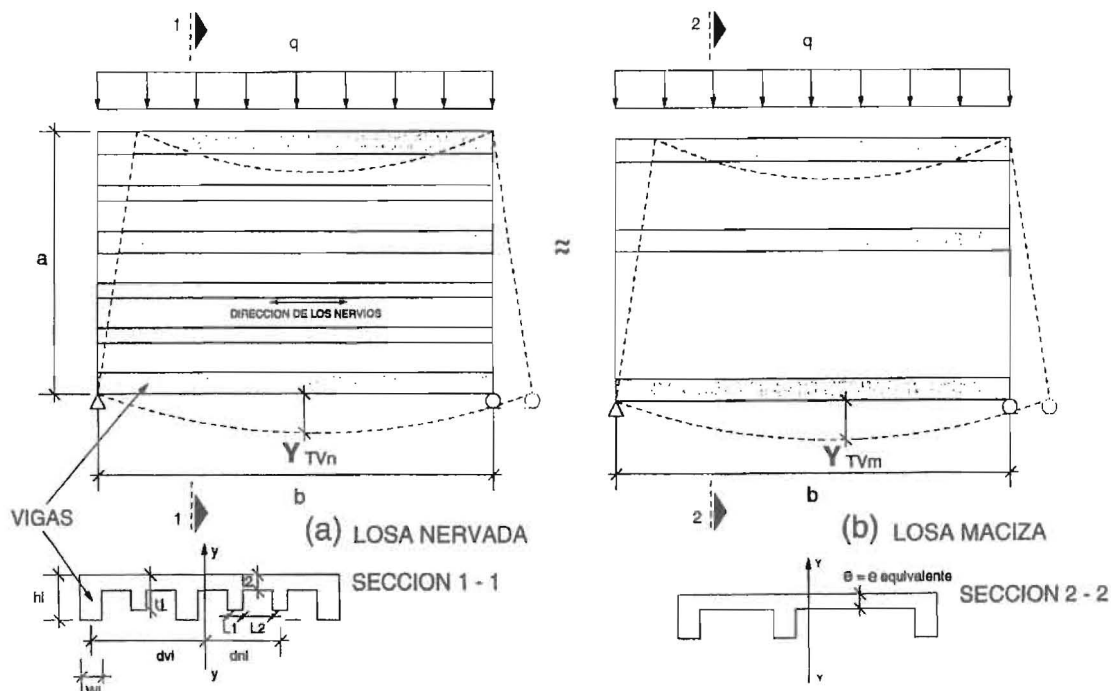


Figura 2. Aproximación de un paño de losa nervada a un paño rectangular de losa maciza de espesor equivalente e. (Flexión en la dirección transversal de los nervios).

pesor de la losa maciza equivalente, I_v = Momento de Inercia de la sección transversal de las vigas paralelas a los nervios, alrededor del eje de flexión (línea neutra).

Con la finalidad de relacionar el momento de Inercia de las vigas y el momento de Inercia de la sección transversal de losa nervada, se introduce el coeficiente adimensional $\beta = I_v/I_{yyn}$.

La Ec. 1 puede ser rescrita y renombrada de la siguiente forma. Para la deflexión de la losa nervada:

$$Y_{TVn} = \frac{5qb^4}{384E(1 + \beta)I_{yyn}} + \frac{fs1 q b^2}{8G A_{total}} \quad (2)$$

$$fs1 = A_{total}/A_{loseta}$$

La ecuación para el cálculo de la deflexión de la losa maciza es:

$$Y_{TVm} = \frac{5qb^4}{384E(ea^3/12 + \beta I_{yyn})} + \frac{fs2 q b^2}{8G(ea)} \quad (3)$$

$$fs2 = 1.20 \text{ (para una sección rectangular).}$$

Igualando (2) y (3) y haciendo varias simplificaciones las cuales se presentan en detalle en la Ref. [8], se obtiene el espesor equivalente e dado por la Ec. (4):

$$e = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\Omega\rho}}{2\Omega} \quad (4)$$

$$\Omega = \frac{9.3 \times 10^5}{I_{yyn}} a^6 + \frac{6.71 \times 10^6}{A_{loseta}} a^4 \quad (5)$$

$$\lambda = 1.21 \times 10^8 \frac{I_{yyn}}{A_{loseta}} a - 1.92 \times 10^7 a^3 \quad (6)$$

$$\rho = -1.45 \times 10^8 I_{yyn} \quad (7)$$

Espesor Equivalente para la Flexión en la Dirección de los Nervios

Cuando las cargas actúan en la dirección de los nervios, las propiedades mecánicas de la sección alrededor del eje de flexión no permanecen constantes a lo largo del eje longitudinal, cambiando el ancho de la sección en forma periódica.

dica de $t1$ a $t2$, tal como se muestra en la Figura 3. El cálculo del espesor en la dirección de los nervios se determina considerando la sección variable, cuya derivación detallada puede encontrarse en [8]. El espesor equivalente e' queda dado por:

$$e' = (L1 + L2)/(L1/t1 + L2/t2) \tag{8}$$

Siendo: $L1$ = Ancho de nervios (cm), $L2$ = Ancho libre entre nervios (cm), $t1$ = Altura total de nervios, incluyendo loseta (cm), $t2$ = Altura o espesor de loseta (cm).

Para la losa nervada típica de 25 cm de altura, el espesor equivalente resulta ser 5,95 cm.

Evaluación de las Fórmulas Propuestas

El proceso de evaluación de las fórmulas propuestas consistió en analizar y comparar los resultados obtenidos de un grupo de edificios de un piso de configuración tal como la mostrada en la Figura 4, en los cuales se modeló el diafragma

incorporando la geometría dentada de la losa nervada, utilizando dos modelos: El Modelo N° 1 incorpora la geometría irregular de la losa nervada usando elementos finitos de diferente espesor. El Modelo N° 2 mediante el uso de elementos finitos planos de espesor equivalente constante, determinado a partir de la Ec. 4.

Los edificios se agruparon de acuerdo a la distribución de rigidez lateral en planta. Se consideraron tres tipos de distribución: 1) Rigidez perimetral, que corresponde a edificios cuya rigidez lateral en la dirección de análisis está distribuida un 90% en los planos resistentes de los dos extremos de la planta y un 10% en los planos resistentes internos, 2) rigidez intermedia, definida análogamente por un 60% de rigidez en los planos extremos y un 40% en los internos, y 3) rigidez uniforme, definida por igual rigidez lateral en todos los planos resistentes. Cada edificio fue sometido a una carga horizontal estática en dirección transversal, distribuida uniformemente sobre la losa. Las dimensiones y resultados detallados del análisis se presentan en Rodríguez [8]. En 18 edificios analizados se apreciaron diferencias

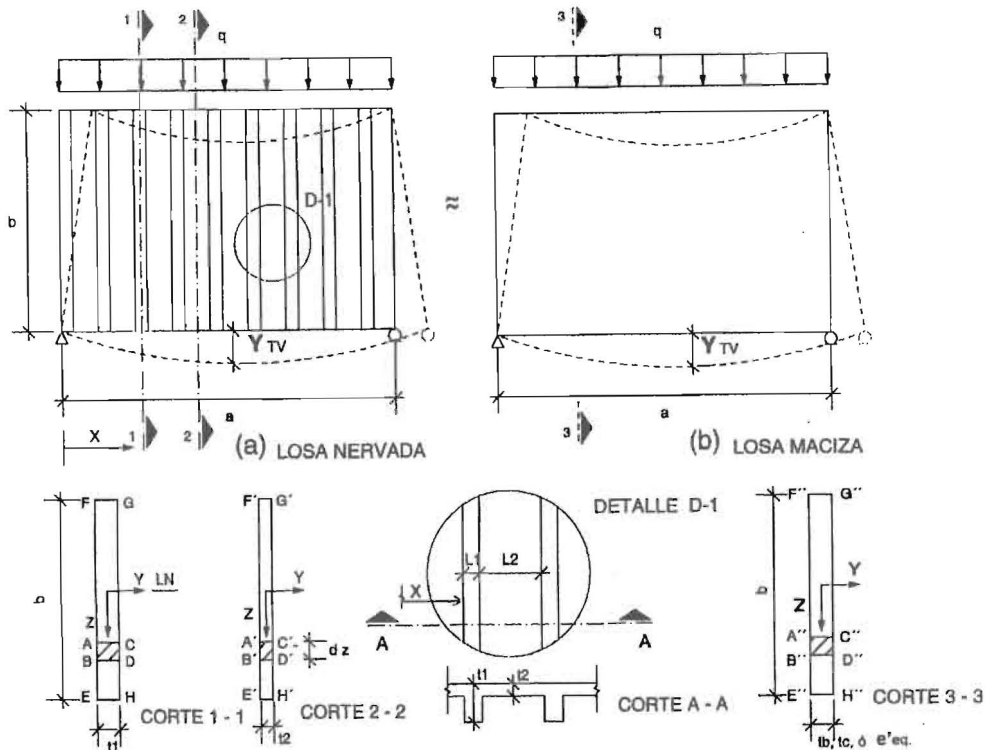


Figura 3. Aproximación de un paño de losa nervada a un paño rectangular de losa maciza de espesor equivalente e' . Flexión en la dirección de los nervios.

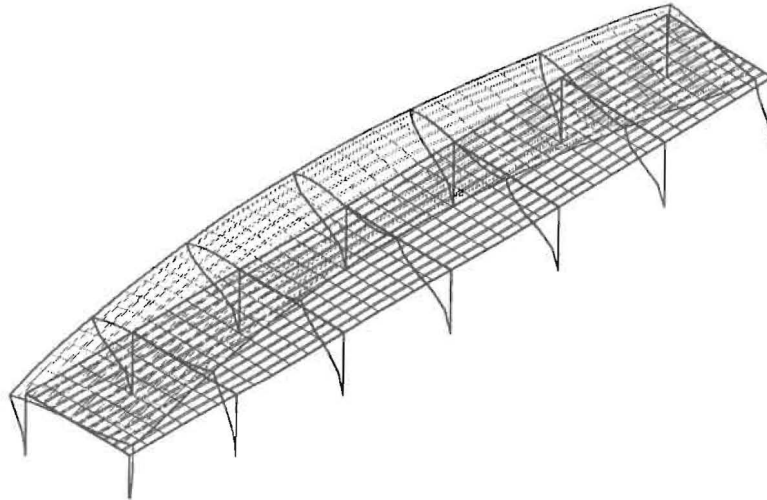


Figura 4. Configuración de los edificios empleados para evaluar el espesor equivalente de las losas nervadas.

menores al 5% entre el Modelo N° 1 y el Modelo N° 2 al calcular los desplazamientos máximos del diafragma y las fuerzas cortantes resultantes en cada plano resistente. En Rodríguez [8] se presentan las evaluaciones efectuadas de la fórmula propuesta (Ec. 8) para la dirección de los nervios, encontrándose resultados similares. Estos resultados permiten concluir que el modelo propuesto constituido con elementos finitos planos de espesor equivalente es apropiado para describir el comportamiento de las losas nervadas.

Selección del Número de Elementos Finitos

La selección del número de elementos requiere un equilibrio entre la mayor precisión nu-

mérica (mayor número de elementos) y el menor esfuerzo numérico (menor número de elementos). En Rodríguez [8] se evaluaron un total de 24 edificios de un piso variando el número de elementos finitos, el espesor de la losa, la distribución de rigidez lateral y la relación largo/ancho de planta. Resultados seleccionados se muestran en la Figura 5, donde se presenta el error en el desplazamiento horizontal del piso en un punto de la losa, cuando el diafragma ha sido sometido a carga estática lateral distribuida uniformemente. Se ha calculado el error con respecto a los resultados obtenidos para los diafragmas constituidos con mallas de 256 E.F. Para el caso en que se incorporan 16 E.F en el modelo de la losa se observa un error máximo de 6.68%. Se recomienda para efectos prácticos en edificios de planta

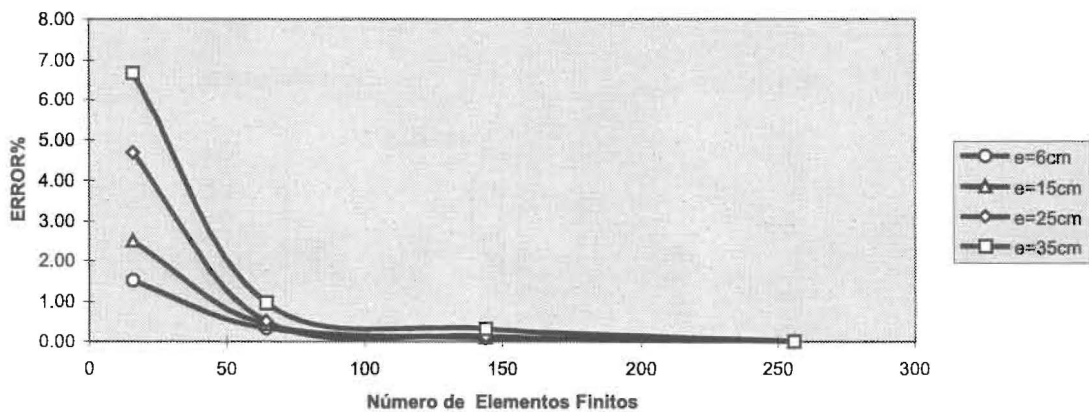


Figura 5. Error relativo en el desplazamiento de piso.

rectangular usar un número no menor de 16 elementos finitos.

Ejemplo de Aplicación Práctica

Con objeto de ejemplificar el uso práctico de las propuestas y recomendaciones dadas en las secciones anteriores se presenta el análisis de un edificio de 4 pisos incorporando la flexibilidad del diafragma en el modelo. Y con la finalidad de evaluar el error en el cual se incurre con la hipótesis de diafragma rígido comúnmente utilizada en el análisis sísmico, se analiza el edificio considerando dicha hipótesis.

El sistema de piso del edificio está constituido por una losa nervada de 25 cm de espesor armada en la dirección longitudinal interconectada monolíticamente con un reticulado de vigas en dos direcciones ortogonales. La altura entre pisos es de 3m. Existe una serie de aberturas asociadas a los núcleos de ascensores y escaleras. En la Figura 6 se muestra la planta típica de

la edificación y el nivel techo sala de máquinas (TSM). Las columnas de los ejes 1 y 8 son de 30 cm x 120 cm mientras que en los ejes 2 a 7 son de 40 cm x 60 cm. Las dimensiones de las vigas se indican en la Figura 6. Se tienen paredes de mampostería hecha con bloques de concreto de 30 cm de espesor en los extremos de la edificación, en la dirección longitudinal, es decir en los ejes 1 y 8. La tabiquería interior es liviana tipo *dry-wall*, la cual no tiene aporte en la rigidez estructural. Las fachadas asociadas a los ejes A y D están recubiertas de cristal, lo cual tampoco modifica significativamente la rigidez de la edificación en dirección longitudinal.

La losa nervada se ha modelado con elementos finitos planos tipo membrana de espesor equivalente interconectados en los nodos con las vigas. El espesor equivalente calculado con la Ec. 4 es 6,78 cm y ha sido redondeado a 7 cm. Cada planta tipo está modelada con 24 elementos finitos planos. El TSM ha sido modelado con 3 elementos finitos. La rigidez que aportan las pa-

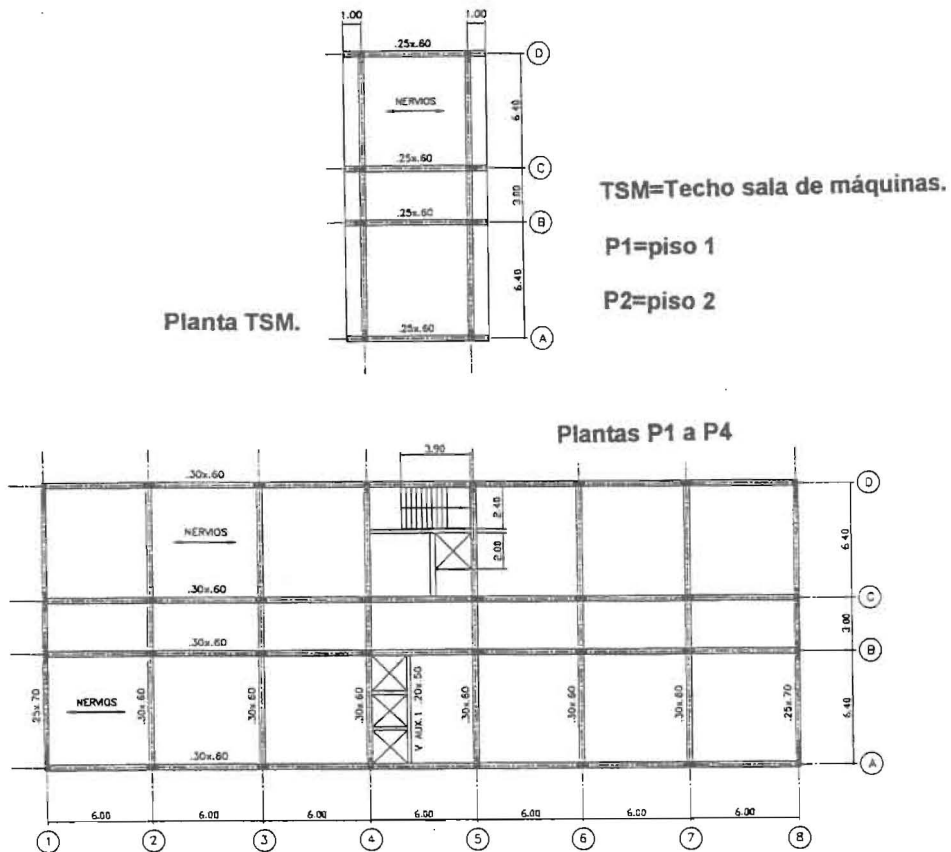


Figura 6. Plantas del edificio de 4 pisos.

Tabla 1
Desplazamientos de piso (cm) y error asociado al modelo con diafragma rígido (D.R)
del edificio de 4 pisos

Deflexión en los extremos (Pórtico 1)			
PISO	D.F	D.R	Error %
1	0,119	0,146	22,69
2	0,326	0,354	8,59
3	0,519	0,531	2,31
4	0,661	0,657	-0,61
Deflexión en el centro (Pórtico 4)			
PISO	D.F	D.R	Error %
1	0,175	0,145	-17,14
2	0,446	0,357	-19,96
3	0,676	0,534	-21,01
4	0,880	0,663	-24,66

redes de mampostería en las fachadas de los ejes 1 y 8 ha sido modelada a través de bielas diagonales equivalentes de concreto, las cuales se han dimensionado de acuerdo a Rubiano *et al.* [11].

Para el modelo con diafragma flexible se ha especificado el módulo de elasticidad del concreto asociado a $f_c = 250 \text{ Kgf/cm}^2$. Para modelar el diafragma rígido se ha incorporado un módulo de elasticidad 1000 veces mayor al asociado al concreto 250 Kgf/cm^2 . La masa de la edificación ha sido definida por unidad de volumen en los elementos finitos. El programa de cálculo la discretiza y la concentra en los nodos. Para cada modelo se ha llevado a cabo un análisis dinámico de superposición modal con el uso de un espectro de respuesta. El análisis se ha llevado a cabo con el uso de un espectro plano con aceleración de $0,66 \text{ g}$, definido para la dirección Y, utilizando 25 modos de vibración.

En la Tabla 1 se resumen los resultados de los desplazamientos de piso obtenidos en los pórticos extremos y central del edificio para los análisis efectuados con diafragma flexible (D.F.) y diafragma rígido (D.R.). El error relativo, en porcentaje, asociado al modelo con diafragma rígido se muestra también en la Tabla 1. De estos resultados se encuentra que en edificios como el evaluado, en los cuales la relación largo/ancho excede de 2,5 y con concentración importante de rigidez en los extremos se puede incurrir en errores

significativos al adoptar un modelo con diafragma rígido. Para el caso del edificio analizado con diafragma rígido se han registrado diferencias máximas hasta de 25% con respecto al diafragma flexible.

Conclusiones y Recomendaciones

Se ha investigado el modelado de la flexibilidad en su propio plano de los sistemas de piso de edificios constituidos por losas nervadas y losas macizas, y se ha propuesto un procedimiento de fácil aplicación práctica que permite incorporar este efecto en el diseño sísmico de edificios. Las conclusiones más importantes son las siguientes:

a) Las losas de piso macizas o de sección transversal irregular (nervadas) pueden ser convenientemente transformadas a una losa maciza equivalente de espesor constante, pudiendo modelarse el diafragma a través de una malla de elementos finitos planos constituida con al menos 16 EF.

b) La presencia de errores significativos obtenidos en el ejemplo presentado, revela la necesidad de incorporar la flexibilidad del diafragma en algunos edificios característicos, tales como aquellos en los cuales la relación largo/ancho de planta es superior a 2,5 y simultáneamente presentan concentración significativa de rigidez la-

teral en los extremos de la planta. Estos resultados sugieren la conveniencia de desarrollar estudios futuros que identifiquen los tipos de edificios donde estos efectos son importantes y deban ser incluidos en el diseño sísmico.

Referencias Bibliográficas

1. Unemori A. L., Roesset J.M., and Becker J.M.: "Effect of Inplane Floor Slabs Flexibility on the Response of Crosswall Building Systems". ACI, publication SP-63 (1980) 113-134.
2. Jain S. K. and Jennings P. C.: "Analytical Models for Low-Rise Building with Flexible Floor Diaphragms". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol.13 (1985) 225-241.
3. Panahshahi N., Reinhorn A. M. and Kunnath S. K.: "Earthquake Simulation Study of One Sixth Scale-Model R/C Building with Flexible Floor Diaphragms". U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Chicago, Illinois, Vol. II (1994) 641-650.
4. Panahshahi N., Reinhorn A. M. and Kunnath S. K.: "Modeling of R/C Building Structures with Flexible Floor Diaphragms (Idarc2)". Technical Report NCEER-88-0035 (1988).
5. Nakashima M., Huang T. and Lu Le-Wu: "Effect of Diaphragm Flexibility on Seismic Response of Building Structures". VIII World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, Vol. IV (1984) 735-742.
6. Nakashima M., Huang T. and Lu Le-Wu: "Experimental Study of Beam-Supported Slabs Under In-Plane Loading". *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 79 (1982) 59-65.
7. Karadogan H. F.: "Earthquake Analysis of Structures with Flexible Floors". Seventh World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 5 (1980) 175-183.
8. Rodríguez T. M.: "Modelaje de la flexibilidad en el plano de los sistemas de piso en edificios sujetos a sismos". Tesis de Maestría. IMME, Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Caracas (1997).
9. Timoshenko S. P. and Gere J. M.: "Mecánica de Materiales". Unión Tipográfica Editorial. Hispano Americana, S. A. de C. V. (1979).
10. Wilson E. L. and Habibullah A.: "SAP90, A Series of Computer Programs for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures". Computers and Structures Inc., Berkeley, California (1989).
11. Rubiano N.R., Bashandy T. R., Klingner R. E. y Sweeney S. C.: "Muros Diafragmas en Edificios de Concreto Reforzado". Curso Internacional de Ingeniería Sísmica, IMME, Universidad Central de Venezuela, Caracas (1997).

Recibido el 12 de Junio de 2000

En forma revisada el 30 de Abril de 2001