

# Generalization of the CQC3 criterion to include three seismic components in any direction

Oscar A. López y Julio J. Hernández

Facultad de Ingeniería, Universidad Central de Venezuela, Apartado 50361.  
Caracas 1050-A, Venezuela. E-mail: oslopez@reacciun.ve, julher@cantv.net.

## Abstract

The structural response to three seismic translational components that can form any angle with the directions of structural axes is investigated in this paper. The systems are elastic and the seismic motion is described in terms of a response spectrum for each component, which have identical shapes but different intensities. The GCQC3 method for combining responses to multicomponent seismic motion is proposed, which is a generalization of the well-known CQC3 method that restricts a principal seismic component along the vertical direction. The proposed method allows studying the variability of the response with the direction of the three principal seismic components.

**Key words:** Seismic components, inclination, CQC3, response spectrum analysis, seismic response.

# Generalización del criterio CQC3 para incluir tres componentes sísmicas en cualquier dirección

## Resumen

En este artículo se estudia la respuesta estructural ante tres componentes sísmicas traslacionales que puedan incidir con cualquier ángulo con respecto a las direcciones de referencia de la estructura. Se supone conducta elástica de las estructuras y la acción del sismo se especifica mediante espectros de respuesta de cada componente, proporcionales entre sí. Se propone el método GCQC3 para combinar las respuestas ante varias componentes sísmicas, el cual es una generalización del conocido método CQC3 que considera que una componente sísmica principal debe mantenerse según la dirección vertical. El método propuesto permite estudiar la variabilidad de la respuesta con la dirección de las tres componentes sísmicas principales.

**Palabras clave:** Componentes sísmicas, inclinación, CQC3, análisis espectral, respuesta sísmica.

## Introducción

La excitación sísmica en un punto dado ocurre como traslación y rotación generalizadas en el espacio. Podemos descomponer cada una de ellas según tres ejes ortogonales cualesquiera y en general las componentes estarán correlacionadas entre sí. Un estudio ya clásico [1], encontró que existen tres direcciones, llamadas principales, casi constantes durante la fase fuerte del sismo, según las cuales las componentes traslacionales no están correlacionadas. Una de las direc-

ciones principales es casi horizontal y está dirigida hacia el epicentro, la segunda es también casi horizontal y perpendicular a la primera y la última es cercana al eje vertical. Sin embargo, algunos estudios hallan cierta correlación entre la componente vertical y las componentes horizontales [2], lo cual equivale a que la dirección principal no sea exactamente vertical, sino que está algo desviada al respecto. La desviación puede ser significativa en algunos casos. Por ejemplo, los registros de la estación 095 del sismo de Kern County, 1952, citados en Hadjian [2] y procesa-

dos de acuerdo con la National Geophysical Data Center [3] conducen a una inclinación promedio de unos  $17^\circ$  para una componente principal. Algunos trabajos [4], también conducen a pensar en la posibilidad de que una topografía irregular afecte la inclinación de las ondas incidentes.

Recientemente se ha impulsado el análisis conjunto de las llamadas componentes horizontales [5], pero sólo excepcionalmente se exige la adición de la llamada componente vertical, mientras que la influencia de las componentes rotacionales se analiza separadamente. Sin embargo, sismos recientes como los de Northridge (1994) y Kobe (1995) sugieren la necesidad de incorporar las tres componentes traslacionales de la excitación sísmica actuando simultáneamente. Puede estimarse, en general, que el grado de influencia de la componente quasi-vertical en el valor total de una cierta respuesta, en comparación con la influencia de las componentes quasi-horizontales, depende del sistema estructural, de la respuesta en estudio y de la cercanía o no del epicentro, que condiciona el contenido de frecuencias y la intensidad de dicha componente. En edificios aporricados la fuerza axial en las columnas puede ser sensible a la misma, mientras que otras sollicitaciones lo son menos.

Hasta ahora se han presentado en la literatura técnica herramientas que permiten una estimación relativamente sencilla de la respuesta elástica a dos componentes horizontales que pueden incidir con cualquier ángulo con respecto a los ejes principales de la estructura, más una componente de dirección vertical fija, según el método denominado *Complete Quadratic Combination extended to 3 Components (CQC3)*, [6-9]. Este trabajo se sitúa en la perspectiva de ampliar este procedimiento de análisis de respuesta para cubrir la posibilidad de que las tres componentes sísmicas principales actúen según direcciones arbitrarias en el espacio y disponer así de una herramienta de análisis. Quedan pendientes posteriores verificaciones con análisis temporales y acelerogramas reales.

### Combinación de respuestas a varias componentes sísmicas

Sea un sistema estructural con  $m$  modos de vibración. Estudiamos una respuesta  $r$  que pue-

da expresarse estáticamente como combinación lineal de los desplazamientos generalizados del sistema estructural: desplazamiento, fuerza, momento o esfuerzo (según una determinada dirección), en un elemento estructural. Definimos la respuesta cuadrática a la componente sísmica  $k$  de dirección arbitraria,  $r_k^2$ , como el cuadrado de la respuesta probable (llamada a veces "máxima" o "pico") que cumpla con cierta probabilidad de excedencia prefijada. En todo el desarrollo que sigue partimos de las respuestas modales ("máximas") que deben establecerse con la misma probabilidad de excedencia porque el sismo se idealiza como un proceso estocástico gaussiano, como es práctica usual.

En esta sección repasamos en primer lugar la respuesta estructural a la acción de una componente sísmica y luego a varias componentes sísmicas actuando simultáneamente, para las cuales supondremos dos casos, uno con correlación nula entre las componentes y otro con correlación total entre ellas. Las expresiones obtenidas nos servirán de base para deducir formulaciones ante la acción de tres componentes sísmicas traslacionales, no-correlacionadas, en función de su dirección.

### Caso de una componente sísmica

En caso de que la estructura esté sometida a la acción de una única componente sísmica  $k$  actuando en cualquier dirección disponemos de la formulación denominada **Combinación Cuadrática Completa**, *Complete Quadratic Combination (CQC)*, [10]. Las  $m$  respuestas modales  $r_{ki}$  ( $i = 1, m$ ) ante una componente sísmica  $k$  están correlacionadas entre sí mediante el coeficiente de correlación modal  $\rho_{ij}$  [10]. Su valor, depende del cociente de las frecuencias modales  $i$  y  $j$ , acercándose a 1 para frecuencias cercanas entre sí y a 0 para frecuencias alejadas entre sí. Fórmulas para calcularlo se encuentran en [10], en textos [11] y en las normas; en general:  $0 < \rho_{ij} \leq 1$ ,  $\rho_{ii} = 1$ . Tenemos:

$$r_k^2 = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{ki} r_{kj} \quad (1)$$

donde debe destacarse que las respuestas modales  $r_{ki}$  se toman con el signo que les corresponda. Los valores de  $\rho_{ij}$  garantizan que el resultado de la

doble sumatoria es  $\geq 0$ . La formulación CQC debe utilizarse siempre que existan modos con frecuencias cercanas entre sí, y así lo especifican las normas.

### Caso de varias componentes sísmicas no correlacionadas

Si actúan simultáneamente  $n$  componentes sísmicas que no están correlacionadas entre sí, (p. ej.: cuando las componentes sísmicas actúan según las direcciones principales del sismo) podemos estimar la respuesta cuadrática conjunta  $r^2$  simplemente sumando las respuestas cuadráticas correspondientes a cada componente sísmica  $k$  ( $k = 1, n$ ). Se deriva de la suposición de que estamos ante procesos estocásticos gaussianos independientes [11]. Suele llamarse la **regla de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados**, *square-root-of-sum-of-squares* (SRSS). Así pues, usando (1):

$$r^2 = \sum_k r_k^2 = \sum_k \sum_l \sum_j \rho_{yl} r_{kl} r_{kj} \quad (2)$$

### Caso de varias componentes sísmicas totalmente correlacionadas

Cuando actúan simultáneamente  $n$  componentes sísmicas, las cuales puedan suponerse que están totalmente correlacionadas, el problema equivale al de un solo sismo que se presenta descompuesto en esas  $n$  componentes. Es el caso, por ejemplo en que se quiera calcular la respuesta a una componente sísmica actuando en una dirección inclinada del espacio lo cual equivale al problema de calcular la respuesta a la acción de sus tres componentes ortogonales, que por tanto tienen correlación total entre ellas. Para cada modo  $i$  la respuesta modal total es la suma algebraica de las  $n$  respuestas modales a cada componente sísmica:

$$r_i = \sum_k r_{ki}, \quad (i = 1, m); \quad (3)$$

luego combinamos las diferentes respuestas modales totales mediante el criterio CQC (1) para obtener la respuesta cuadrática global:

$$r^2 = \sum_l \sum_j \rho_{yl} r_l r_j = \sum_l \sum_j \rho_{yl} \sum_k r_{kl} \sum_l r_{lj} = \sum_k \sum_l \sum_l \sum_j \rho_{yl} r_{kl} r_{lj}. \quad (4)$$

Si ahora definimos la correlación de respuestas a las componentes sísmicas  $k$  &  $l$  totalmente correlacionadas como:

$$r_{kl} = r_{lk} = \sum_l \sum_j \rho_{yl} r_{kl} r_{lj}, \quad (5)$$

podemos expresar la respuesta cuadrática global, reemplazando (5) en (4):

$$r^2 = \sum_k \sum_l r_{kl}. \quad (6)$$

Obsérvese que la respuesta cuadrática a una sola componente sísmica  $r_k^2$  (1), es un caso particular de la correlación de respuestas (5):

$$r_k^2 = \sum_l \sum_j \rho_{yl} r_{kl} r_{kj} = r_{kk}. \quad (7)$$

Utilizando (7) la expresión (6) puede escribirse también como:

$$r^2 = \sum_k r_k^2 + \sum_k \sum_{l \neq k} r_{kl}. \quad (8)$$

Es importante diferenciar entre la correlación de las respuestas ( $r_{kl}$ ) y la correlación de las componentes sísmicas. Aunque estas últimas estén totalmente correlacionadas, la correlación de las respuestas puede ser pequeña o incluso nula. En el caso de 3 componentes sísmicas  $u$ ,  $v$  &  $w$  totalmente correlacionadas, la expresión (8) queda como:

$$r^2 = r_{uu} + r_{vv} + r_{ww} + 2r_{uw} + 2r_{uv} + 2r_{vu}. \quad (9)$$

## Respuesta a Tres Componentes Sísmicas en Cualquier Dirección

Pasemos ahora a estudiar una determinada respuesta a la acción de un sismo con tres componentes ortogonales principales que puedan tomar cualquier dirección en el espacio, las cuales denominaremos  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_3$  (Figura 1a). Nuestro objetivo, por motivos de su conveniencia en la práctica profesional, será el de expresarla en términos de las respuestas parciales calculadas según las direcciones de referencia de la estructura que llamamos X, Y y Z (Figura 1a).

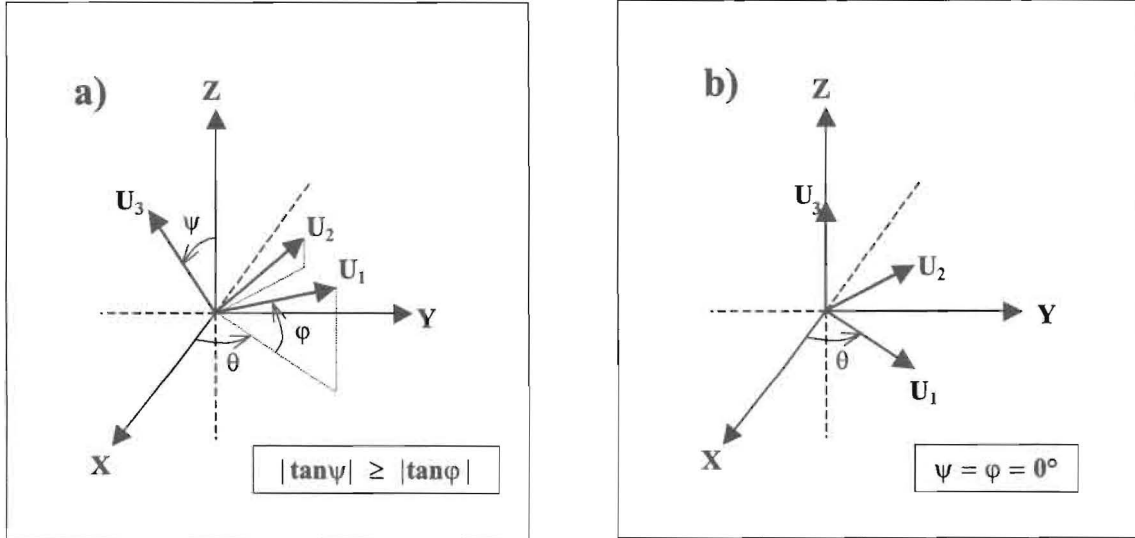


Figura 1. Direcciones principales de la estructura y de las componentes sísmicas espaciales no correlacionadas; a) caso general; b) caso con una componente principal en dirección vertical.

Como simplificación, suponemos que en cada dirección principal la acción sísmica se puede representar mediante un espectro proporcional al espectro de una acción sísmica patrón, siendo  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\gamma_3$  las respectivas intensidades espectrales respecto a dicho espectro patrón.

Los resultados obtenidos son válidos independientemente de que se impongan o no limitaciones a la dirección o intensidad de alguna componente sísmica. Sin embargo, veremos que el ya conocido problema de la respuesta a 3 componentes sísmicas con la imposición de una componente vertical (Figura 1b), es un caso particular relativamente más sencillo.

**Combinación cuadrática completa generalizada con 3 componentes (GCQC3)**

En primer lugar consideremos la acción sísmica dada por el espectro patrón actuando alternativamente según cada dirección de referencia ( $x, y, z$ ) de la estructura (Figura 2). Obtenemos las respuestas cuadráticas para cada dirección de aplicación,  $r_{xx}, r_{yy}, r_{zz}$ , y las respectivas correlaciones,  $r_{xy}, r_{yz}$  y  $r_{zx}$ , dadas por:

$$r_x^2 = r_{xx} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{xi} r_{xj}; \quad r_y^2 = r_{yy} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{yi} r_{yj};$$

$$r_z^2 = r_{zz} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{zi} r_{zj}; \tag{10}$$

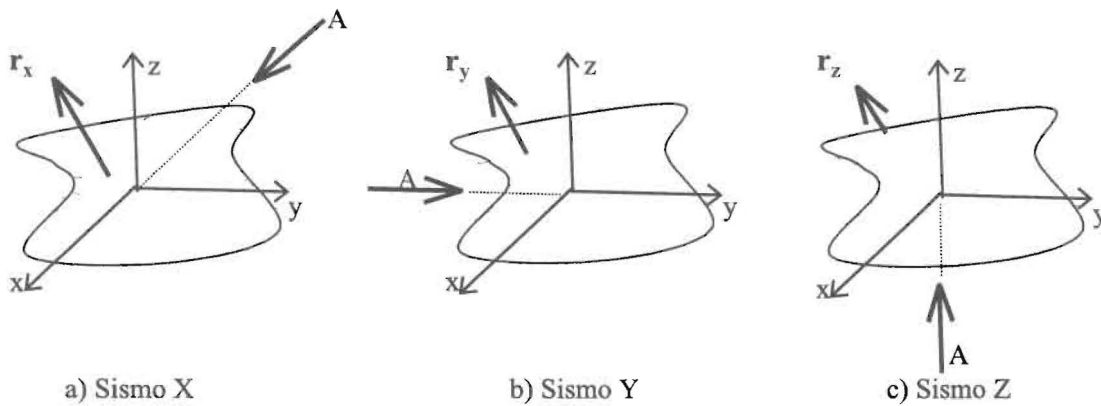


Figura 2. Ilustración de  $r_x, r_y, r_z$  como respuestas ante la componente patrón de espectro A.

$$r_{xy} = r_{yx} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{xi} r_{yj}; \quad r_{yz} = r_{zy} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{yi} r_{zj};$$

$$r_{zx} = r_{xz} = \sum_i^m \sum_j^m \rho_{ij} r_{zi} r_{xj}, \quad (11)$$

donde  $r_{xi}$ ,  $r_{yi}$  y  $r_{zi}$  son los valores de las respuestas parciales en el modo  $i$  ante el espectro patrón aplicado separadamente en las direcciones ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), respectivamente (Figura 2).

Veamos ahora que la respuesta a cada componente sísmica principal obrando en cualquier dirección puede calcularse a partir estos parámetros de respuesta referencial. Luego, podemos obtener la respuesta cuadrática global a las 3 componentes principales actuando simultáneamente, las cuales por definición no están correlacionadas entre sí. Sean  $\underline{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})^t$ ,  $\underline{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})^t$  y  $\underline{u}_3 = (u_{3x}, u_{3y}, u_{3z})^t$  los vectores directores unitarios según las direcciones principales del sismo. La acción según cada una de las componentes principales equivale a la actuación de tres sub-componentes ortogonales según X, Y y Z, totalmente correlacionadas pero de intensidades diferentes. La acción según  $\underline{u}_k$  equivale a  $\gamma_k u_{kx}$  veces la acción sísmica patrón según el eje X, más  $\gamma_k u_{ky}$  veces la acción sísmica patrón según el eje Y, junto con  $\gamma_k u_{kz}$  veces la acción sísmica patrón según el eje Z. Multiplicando estas intensidades por las respuestas (a espectro patrón) de las fórmulas (10) y (11) y sustituyendo los resultados en la expresión (9), asignando  $u$ ,  $v$  y  $w$  a cada sub-componente, obtenemos:

$$r_k^2 = \gamma_k^2 (u_{kx}^2 r_{xx} + u_{ky}^2 r_{yy} + u_{kz}^2 r_{zz} + 2u_{kx} u_{ky} r_{xy} + 2u_{ky} u_{kz} r_{yz} + 2u_{kz} u_{kx} r_{zx}), \quad \{k = 1, 2, 3\} \quad (12)$$

Y dado que las tres componentes según  $U_1$  y  $U_2$  y  $U_3$  no están correlacionadas entre sí, podemos aplicar (2) para obtener la respuesta cuadrática global bajo la acción conjunta de dichas componentes, es decir:  $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ , resultando:

$$r^2 = r_{xx} (\gamma_1^2 u_{1x}^2 + \gamma_2^2 u_{2x}^2 + \gamma_3^2 u_{3x}^2) +$$

$$r_{yy} (\gamma_1^2 u_{1y}^2 + \gamma_2^2 u_{2y}^2 + \gamma_3^2 u_{3y}^2) +$$

$$r_{zz} (\gamma_1^2 u_{1z}^2 + \gamma_2^2 u_{2z}^2 + \gamma_3^2 u_{3z}^2) +$$

$$2r_{xy} (\gamma_1^2 u_{1x} u_{1y} + \gamma_2^2 u_{2x} u_{2y} + \gamma_3^2 u_{3x} u_{3y}) +$$

$$2r_{yz} (\gamma_1^2 u_{1y} u_{1z} + \gamma_2^2 u_{2y} u_{2z} + \gamma_3^2 u_{3y} u_{3z}) +$$

$$2r_{zx} (\gamma_1^2 u_{1z} u_{1x} + \gamma_2^2 u_{2z} u_{2x} + \gamma_3^2 u_{3z} u_{3x}) \quad (13)$$

A la expresión (13) podemos denominarla **Combinación Cuadrática Completa Generalizada con 3 Componentes** (GCQC3 por sus siglas en inglés), pues representa una generalización de la CQC3 [7, 9]; la GCQC3 considera las tres componentes actuando en cualquier dirección espacial mientras que la CQC3 considera una componente fija en la dirección vertical. Esto último corresponde a tomar el tercer vector director fijo como  $\underline{u}_3 = (0, 0, 1)^t$ ; por tanto, los otros dos vectores son horizontales:  $\underline{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, 0)^t$ ,  $\underline{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, 0)^t$ , los cuales pueden variar de dirección, pero manteniéndose en el plano horizontal. En ese caso no necesitamos suponer que el espectro vertical sea proporcional al espectro patrón, sino simplemente que la respuesta vertical es  $r_z$  bajo su espectro. Entonces con esos tres vectores directores la expresión (13) se reduce a:

$$r^2 = r_{xx} (\gamma_1^2 u_{1x}^2 + \gamma_2^2 u_{2x}^2) + r_{yy} (\gamma_1^2 u_{1y}^2 + \gamma_2^2 u_{2y}^2) +$$

$$2r_{xy} (\gamma_1^2 u_{1x} u_{1y} + \gamma_2^2 u_{2x} u_{2y}) + r_z^2. \quad (14)$$

Para comprobar que la expresión (14) es equivalente a la fórmula conocida de la CQC3 [7, 9], consideremos los vectores  $\underline{u}_1$  y  $\underline{u}_2$  situados en el plano horizontal (Figura 1b) formando un ángulo  $\theta$  con los ejes de referencia X y Y. Entonces  $\underline{u}_1 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)^t$ ,  $\underline{u}_2 = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)^t$  y sustituyéndolos en (14) queda como expresión para la respuesta cuadrática global con sismo vertical:

$$r^2 = r_{xx} (\gamma_1^2 \cos^2 \theta + \gamma_2^2 \sin^2 \theta) +$$

$$r_{yy} (\gamma_1^2 \sin^2 \theta + \gamma_2^2 \cos^2 \theta) +$$

$$r_{xy} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) \sin 2\theta + r_z^2, \quad (15)$$

la cual es idéntica a la fórmula CQC3 presentada en las referencias antedichas cuando  $\gamma_1 = 1$ .

La Ec. (15) describe la variación de la respuesta cuadrática con la orientación ( $\theta$ ) de las componentes horizontales del sismo. En las Ref. [9] y [12] se presenta una fórmula explícita que da el valor de las respuestas críticas, máxima y mínima, para el conjunto de valores del ángulo  $\theta$ . Análogamente, en relación con la GCQC3 (13), en



Hernández y López [13] se demuestra que las respuestas críticas ante tres componentes sísmicas pueden ser obtenidas a partir de los autovalores de la matriz de respuesta  $\mathbf{R}$  que se define más adelante.

**Ejemplo ilustrativo**

A continuación ilustramos las expresiones obtenidas con un caso sencillo pero de características reales. Sea una plataforma cuadrada de un piso formada por una losa apoyada en cuatro vigas que a su vez apoyan en cuatro columnas (Figura 3). El material de los elementos estructurales es concreto armado con  $f_c = 27.5$  MPa. La distancia entre columnas es de 6 metros y su altura 4 metros. El espesor de la losa es 0.15 m, la sección de las vigas  $0.40 \text{ m} \times 0.65 \text{ m}$  y las columnas son de  $0.60 \text{ m} \times 0.60 \text{ m}$ . La plataforma se diseña para soportar equipos con una carga distribuida de  $4.9 \text{ kN/m}^2$  en el área de la losa y una carga concentrada de  $106 \text{ kN}$  en el centro de la misma.

Consideramos la estructura sometida a un sismo con tres componentes que pueden obrar según cualquier dirección en el espacio. La componente  $U_1$  tiene un espectro de diseño elástico en términos de pseudoaceleración (Figura 4) definido para la aceleración, velocidad y desplazamientos picos del terreno iguales a  $0.5 \text{ g}$ ,  $61 \text{ cm/seg}$  y  $45.7 \text{ cm}$  respectivamente, percentile de  $84.1\%$  y coeficiente de amortiguamiento de  $5\%$ . Las componentes sísmicas  $U_2$  y  $U_3$  tienen espectros iguales a  $0.65$  y  $0.50$  veces el espectro anterior, respectivamente, valores justificados en estadísticas de espectros [14, 15]. Entonces  $\gamma_1 = 1$ ,  $\gamma_2 = 0.65$  y  $\gamma_3 = 0.5$ .

El sistema estructural se modeló en forma simplificada mediante el programa de computación SAP90 [16], tomando 9 nodos desplazables de una malla de  $2 \times 2$  metros en la losa, para un total de 27 grados de libertad, con elementos finitos planos para la losa y elementos lineales para las vigas y columnas. La respuesta  $r$  a estudiar consiste en la fuerza axial de la columna inferior izquierda (Figura 3). En la Tabla 1 se exponen los periodos propios que resultan significativos para los movimientos traslacionales del terreno (X, Y, Z) con sus respectivas masas participativas y las fuerzas axiales  $r_{ik}$  en cada modo  $i$  en respuesta a

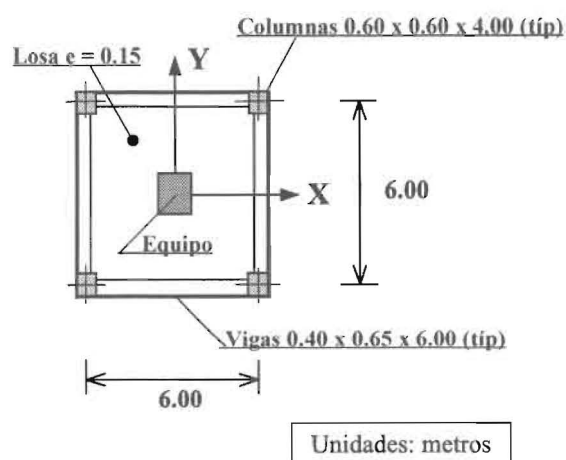


Figura 3. Planta de plataforma de un piso.

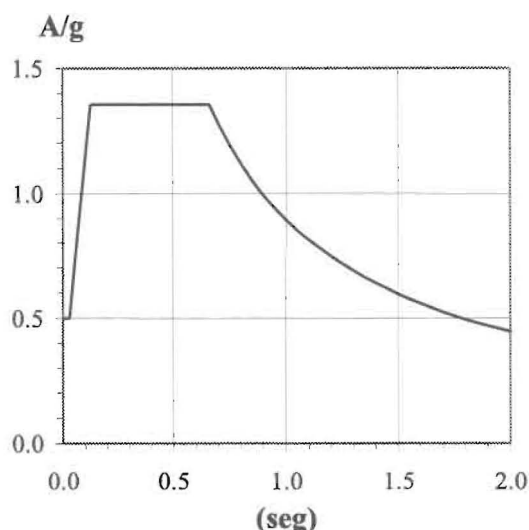


Figura 4. Espectro elástico de pseudoaceleraciones.

cada componente sísmica  $k$  (X, Y, Z) bajo el espectro de la Figura 4.

Con los valores modales, aplicando las Ecs. (10) y (11) calculamos las respuestas referenciales ante una componente sísmica y las correlaciones entre esas respuestas:

$$r_x = 105.8 \text{ kN}, \quad r_y = 105.8 \text{ kN}, \quad r_z = 87.1 \text{ kN};$$

$$r_{yz} = r_{zx} = 7908 \text{ kN}^2; \quad r_{zz} = 7589 \text{ kN}^2. \quad (16)$$

Obtengamos ahora las respuestas a la componente sísmica patrón, según las diferentes

Tabla 1  
Valores modales

Modo ( $\theta$ )	$T_t$ (seg)	Masas participativas (%)			Respuestas a la componente sísmica patrón según X, Y y Z (kN)		
		Dir. X	Dir. Y	Dir. Z	$r_{ix}$	$r_{iy}$	$r_{iz}$
1	0.176	92.2	0	0	105.6	0	0
2	0.176	0	92.2	0	0	105.6	0
3	0.174	0	0	34.5	0	0	75.6
6	0.073	7.8	0	0	6.2	0	0
7	0.073	0	7.8	0	0	6.2	0
11	0.045	0	0	34.1	0	0	34.8
19	0.0102	0	0	2.0	0	0	1.6
23	0.0098	0	0	29.4	0	0	23.9

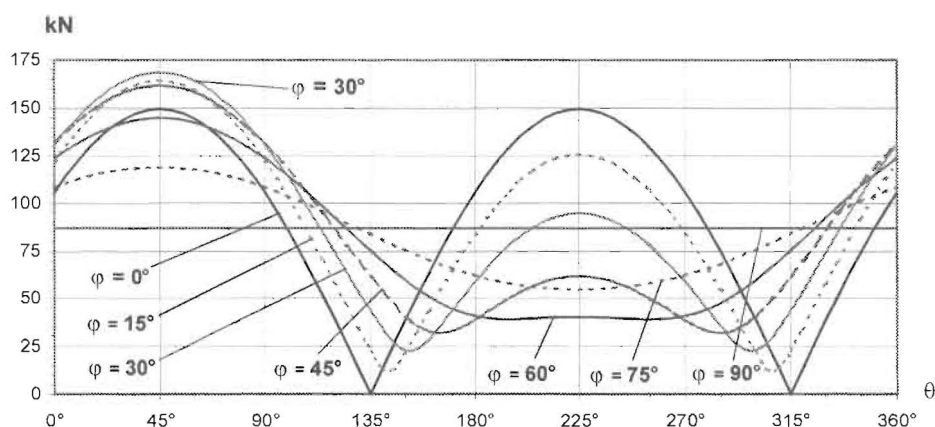


Figura 5. Respuesta según dirección ( $\theta$ ,  $\varphi$ ) de aplicación de una componente sísmica.

direcciones del espacio, mediante el vector unitario  $u_1$ , expresado mediante dos ángulos (Figura 1a):  $\theta$  = ángulo entre el eje X y su proyección en el plano XY;  $\varphi$  = ángulo entre el vector  $u_1$  y el plano XY:

$$u_1 = (\cos \theta \cos \varphi; \sin \theta \cos \varphi; \sin \varphi). \quad (17)$$

Por simetría podemos limitarnos a analizar la variación  $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$  junto con  $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ . Sustituyendo (17) y (16) en (12) obtenemos la fuerza axial en función de  $\theta$  y  $\varphi$ , la cual se presenta en la Figura 5, para incrementos discretos de  $15^\circ$  en el valor de  $\varphi$ . El caso  $\varphi = 0^\circ$  corresponde a las componentes horizontales, siendo  $\theta = 45^\circ$  la que conduce a la mayor respuesta  $r = 149.62$  kN

entre ellas. Del conjunto de casos de  $u_1$  inclinados en el espacio, la mayor respuesta graficada está en  $\varphi = 30^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$  con el valor  $r = 168.44$  kN, un 12.6% mayor que la máxima a componente horizontal.

Consideremos ahora la acción de 3 componentes sísmicas ortogonales simultáneas. La posición de los vectores directores unitarios en el espacio puede expresarse mediante los 3 ángulos ( $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ) indicados en la Figura 1a, siendo  $\psi$  = ángulo entre el vector  $u_3$  y el eje vertical. El vector  $u_1$  se indicó en (17) y los otros vectores son:

$$u_2 = (-\sin \theta \sec \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi; \cos \theta \sec \varphi \cos \psi - \sin \theta \sin \varphi; + \sin \varphi). \quad (18)$$

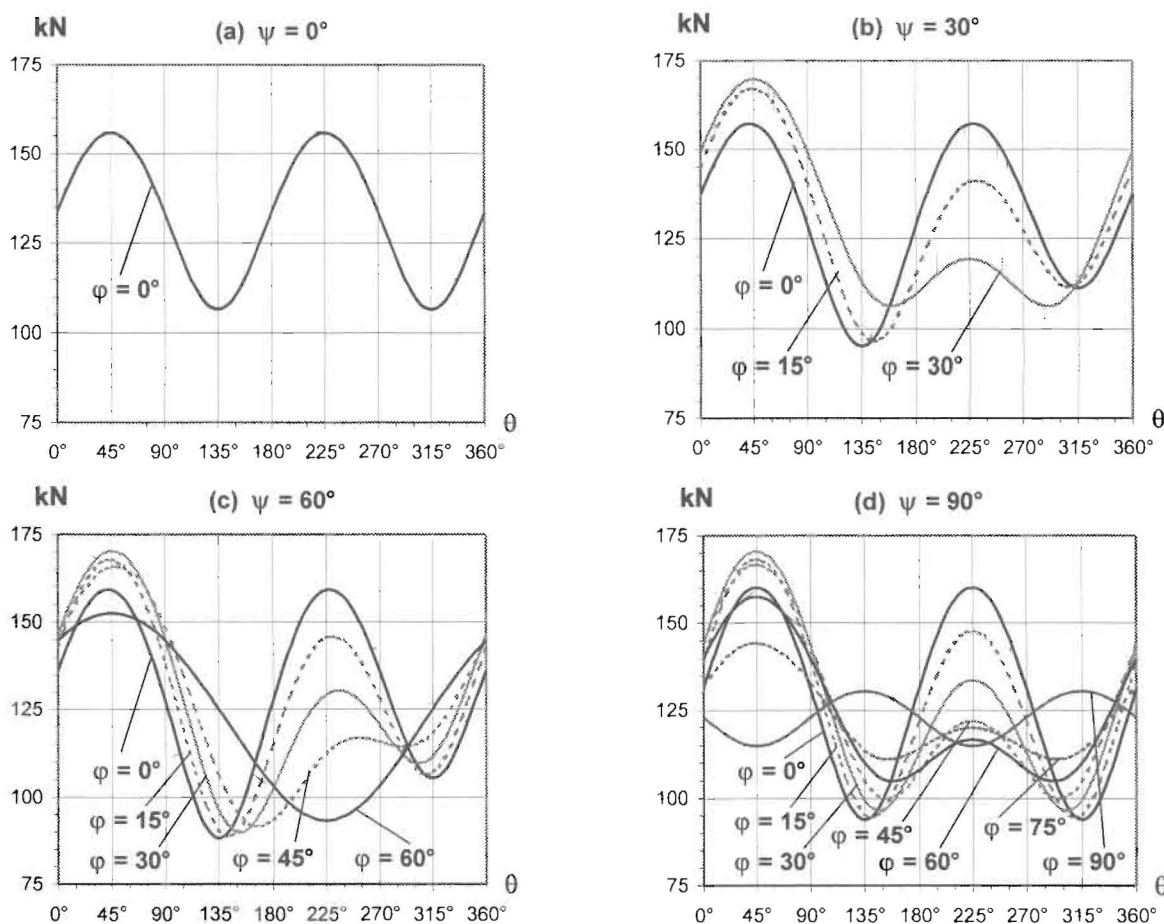


Figura 6. Respuesta según dirección  $(\theta, \varphi, \psi)$  de aplicación de tres componentes sísmicas, con  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0.65$  y  $\gamma_3 = 0.5$ .

$$u_3 = (-\cos \theta \tan \varphi \cos \psi + \Lambda \sin \theta; -\sin \theta \tan \varphi$$

$$\cos \psi - \Lambda \cos \theta; \cos \psi), \text{ donde} \tag{19}$$

$$\Lambda = \pm \cos \psi \sqrt{\tan^2 \psi - \tan^2 \varphi} \tag{20}$$

En la expresión (20) se observa el requisito de que debe ser  $|\tan \psi| \geq |\tan \varphi|$ .

Por simetrías basta con analizar los rangos  $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ ,  $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$  y  $\psi \in [0^\circ, 90^\circ]$ . Sustituyendo (17), (19), (20) y (21) en (14) obtenemos las respuestas mediante la GCQC3 en función de los tres ángulos. En la Figura 6 se presentan las mismas incrementando  $\varphi$  y  $\psi$  en tramos discretos de  $15^\circ$  y  $30^\circ$ , respectivamente. La Figura 6a,  $\varphi = \psi = 0^\circ$ , corresponde a la situación de la tercera componente sísmica vertical, o sea, es el caso de la

CQC3. Para él la respuesta máxima es  $r = 155.83$  kN cuando  $\theta = 45^\circ$ . Cuando las tres componentes sísmicas varían en todo el espacio (Figura 6b a 6d) la máxima respuesta es  $r = 170.44$  kN cuando  $\psi = 90^\circ, \varphi = 30^\circ$  y  $\theta = 45^\circ$  y la mínima  $r = 88.19$  kN cuando  $\psi = 60^\circ, \varphi = 0^\circ$  y  $\theta = 135^\circ$ . La respuesta máxima es poco mayor que la obtenida con una sola componente sísmica inclinada. Nótese que, para la respuesta máxima, la componente menos intensa (3) queda horizontal, según la dirección en que la respuesta a una componente es nula (Figura 5).

### Expresiones matriciales de las respuestas y sus correlaciones

Definimos  $\mathbf{R}$  como matriz de respuestas a la componente sísmica patrón actuando alternadamente según los ejes X, Y y Z:



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Sea cualquier vector unitario en el espacio  $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z)^t$ , a lo largo del cual actúa una componente sísmica de intensidad espectral  $\gamma_u$  respecto a la patrón. Por analogía con (12):

$$r_{\underline{u}}^2 = \gamma_u^2 (u_x^2 r_{xx} + u_y^2 r_{yy} + u_z^2 r_{zz} + 2u_x u_y r_{xy} + 2u_y u_z r_{yz} + 2u_z u_x r_{zx}) = \gamma_u^2 \underline{u}^t \mathbf{R} \underline{u}. \quad (22)$$

Sea otro vector unitario  $\underline{v} = (v_x, v_y, v_z)^t$  según el cual actúa una acción sísmica de intensidad  $\gamma_v$  respecto a la patrón, totalmente correlacionada con la de la dirección  $\underline{u}$ . La correlación  $r_{uv}$  viene a ser:

$$r_{uv} = r_{vu} = \sum_t \sum_j \rho_{y_t} r_{u_t} r_{v_j} = \gamma_u \gamma_v \sum_k \sum_l u_k v_l \sum_t \sum_j \rho_{y_t} r_{k_t} r_{l_j} = \gamma_u \gamma_v \underline{u}^t \mathbf{R} \underline{v}. \quad (23)$$

Veamos ahora como se abrevian las expresiones de la respuesta cuadrática global a 3 componentes sísmicas principales. La expresión (12) viene a ser mediante (22) y (23):

$$r_k^2 = \gamma_k^2 \underline{u}_k^t \mathbf{R} \underline{u}_k, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Y, por tanto, la fórmula (13) se puede escribir simplemente como:

$$r^2 = \sum_{k=1}^3 \gamma_k^2 \underline{u}_k^t \mathbf{R} \underline{u}_k. \quad (\text{GCQC3}) \quad (25)$$

## Conclusiones

Se ha desarrollado una fórmula explícita para el cálculo de la respuesta estructural ante las tres componentes principales del sismo, las cuales puedan tener cualquier orientación con respecto a las direcciones de referencia de la estructura. Esta fórmula, llamada GCQC3, constituye una extensión del conocido criterio de la Combinación Cuadrática Completa con 3 Componentes (CQC3), y permite la incorporación de la posibilidad de que las componentes sísmicas principales no estén situadas exactamente en el plano horizontal y el eje vertical, sino que sean quasi-horizontales y quasi-verticales.

Se presentó un ejemplo de la influencia de la desviación de una componente sísmica principal respecto a la vertical en la respuesta de una estructura algo sensible a la misma.

Se desarrollaron expresiones matriciales compactas de las respuestas a una y a tres componentes sísmicas actuando en cualquier dirección.

## Agradecimientos

Los autores quieren dejar constancia de su agradecimiento al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela y a la Coordinación de Investigación de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, por su contribución al financiamiento de esta investigación.

## Referencias Bibliográficas

1. Penzien, J. and Watabe, M.: "Characteristics of 3-dimensional earthquake ground motion", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 3 (1975), 365-374.
2. Hadjian, A. H.: "On the Correlation of the Components of Strong Ground Motion", 2<sup>nd</sup> International Conference on Microzonation, Vol. III (1978), San Francisco.
3. National Geophysical Data Center: "Earthquake Strong Motion", (1996), Boulder, Colorado.
4. Marsan, P., Milana, G., Pugliese, A. and Sano, T.: "Local Amplification Effects recorded by a Local Strong Motion Network during the 1997 Umbria-Marche Earthquake", 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering (2000), New Zealand.
5. International Conference of Building Officials, ICBO: "1997 Uniform Building Code", Volume 2, Structural Engineering Design Provisions, Whittier (1997), CA, 492 p.p.
6. Smeby, W. and Der Kiureghian, A.: "Modal Combination Rules for Multicomponent Earthquake Excitation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13 (1985), p. 1-12.
7. Menun, C. and Der Kiureghian, A.: "A Replacement for the 30%, 40% and SRSS Rules

- for Multicomponent Seismic Analysis", *Earthquake Spectra*, 14, N° 1 (1998), p. 153-156.
8. Lopez, O. A., and Torres, R.: "The critical angle of seismic incidence and the maximum structural response." *Earthquake Engrg. and Struct. Dyn.*, 26 (1997), p. 881-894.
  9. López O. A., Chopra A. K. and Hernández J. J.: "The significance of the direction on the structural response", 12<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering (2000), New Zealand.
  10. Wilson, E. L., Der Kiureghian, A. and Bayo, E. P.: "A replacement for the SRSS method in seismic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9 (1981), p. 87-194.
  11. Newmark, N. and Rosenblueth, E.: "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs (1971), N. J.
  12. López, O. A. y Hernández, J. J.: "Criterios para combinar respuestas ante dos componentes sísmicas", *Revista Técnica, Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia* (2000), propuesto para publicación.
  13. Hernández, J. J. and López, O. A.: "Response to Three-component Seismic Motion of Arbitrary Direction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* (2001), accepted for publication.
  14. López O. A., Hernández, J. J y Raven, E.: "Algunas propiedades de las tres componentes sísmicas principales", en preparación (2001).
  15. Bozorgnia, Y., Campbell, K. W. and Niazi, M.: "Observed spectral characteristics of vertical ground motion recorded during worldwide earthquakes from 1957 to 1995", *Proc. 12th World Conf. Earthq. Eng.*, 2671/4 (2000), New Zealand.
  16. Computers & Structures, Inc.: "SAP90 Computers Program", Berkeley, California (1989).

Recibido el 9 de Octubre de 2000

En forma revisada el 17 de Abril de 2001