Rev. Téc. Ing. Univ. Zulia. Vol. 27, Nº 1, 13 - 19, 2004

Some integrals involving Wright's hypergeometric function

Daniel Duque[1] *y Leda Galué*[2]
[1]*Departamento de Matemáticas.* [2]*Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA). Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela*

Abstract

In this paper some single and double integrals involving the generalized hypergeometric function of Wright ${}_p\Psi_q(z)$ are evaluated. Integrals involving the function ${}_2R_1^{\tau}(z)$ as particular cases are obtained.

Key words: Integrals, generalized hypergeometric function of Wright.

Algunas integrales que involucran la función hipergeométrica de Wright

Resumen

En este artículo se evalúan algunas integrales simples y dobles que involucran a la función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_p\Psi_q(z)$. Se obtienen como casos particulares integrales que involucran a la función ${}_2R_1^{\tau}(z)$.

Palabras clave: Integrales, función hipergeométrica generalizada de Wright.

1. Introducción

En las matemáticas aplicadas tienen gran relevancia las llamadas funciones especiales, ya que éstas aparecen en las soluciones de ecuaciones diferenciales. Entre las funciones especiales más importantes están las funciones hipergeométricas: la función hipergeométrica de Gauss, la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q(z)$, la función de Appell, la función de Humbert, la función de Lauricella y otras. Estas se encuentran en muchas aplicaciones tales como estadística, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de vigas, conducción de calor, elasticidad, radiación, etc. Debido a su importancia se estudian sus propiedades, desarrollos asintóticos, desarrollos en serie, etc. a fin de obtener un estudio detallado del comportamiento analítico de tales funciones el cual permite resolver una amplia variedad de problemas.

Una generalización de la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q(z)$ es la llamada función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_p\Psi_q(z)$. Esta función y sus aplicaciones han sido objeto de estudios en la última década [1-3]. En 1994, Alfonso Chirino [1] deduce una representación integral para dicha función, así como también calcula varias integrales que involucran a ${}_2\Psi_1(z)$. Recientemente en 1999, Nina A. Virchenko [2] establece algunas propiedades de la función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_2R_1^{\tau}(z)$ y utiliza la función hipergeométrica confluente generalizada ${}_1\Phi_1^{\tau}(z)$ para definir las funciones de Laguerre ${}_{\tau}L_{\nu}^{\alpha}(z)$ y otras funciones.

En el presente artículo se evalúan algunas integrales simples y dobles que involucran a la función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_p\Psi_q(z)$ partiendo de su definición, y usando técnicas operacionales conocidas. Además se mencionan varios casos particulares.

2. La Función Hipergeométrica Generalizada de Wright

Una interesante generalización de la serie ${}_pF_q$ fue introducida por el matemático E.M. Wright quien consideró la siguiente función hipergeométrica generalizada: [4], [5, p. 21, No. (38)]

$$ {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots(b_q,B_q)\end{matrix};z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{z^k}{k!} \tag{1}$$

donde los coeficientes $A_1,\ldots,A_p$ y $B_1,\ldots,B_q$ son números reales positivos. Esta serie se conoce como la función hipergeométrica generalizada de Wright.

Muchos investigadores [1, 2, 6-14] han estudiado esta función estableciendo para ella algunas propiedades, casos particulares y aplicaciones.

Comparando la definición ${}_pF_q(z)$ y (1) obtenemos la siguiente relación: [5, p. 21, No. (40)]

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\b_1,\ldots,b_q\end{matrix};z\right]=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}\cdot{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,1),\ldots,(a_p,1)\\(b_1,1),\ldots,(b_q,1)\end{matrix};z\right]. \tag{2}$$

Un caso especial de ${}_p\Psi_q(z)$ es: ([2, p. 234, No. (2.1)], [15])

$$ {}_2R_1^{\tau}(z)\equiv{}_2R_1^{\tau}(a,b;c;z)= $$
$$ =\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+\tau k)}{\Gamma(c+\tau k)}\frac{z^k}{k!} \tag{3}$$

donde $\tau\in R$, $\tau>0$; a,b,c son números complejos tales que $\Gamma(a+k)$, $\Gamma(b+\tau k)$ y $\Gamma(c+\tau k)$ son finitos para $k=0,1,2,\ldots$

La serie (3) converge uniformemente para $|z|<1$.

De (3) es obvio que ${}_2R_1^{\tau}(z)$ reduce a la bien conocida función hipergeométrica de Gauss para $\tau=1$.

La representación integral de ${}_2R_1^{\tau}(z)$ viene dada por: ([2, p. 234, No. (2.2)], [15])

$$ {}_2R_1^{\tau}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\times (1-zt^{\tau})^{-a}dt, \tag{4}$$

$\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0$.

3. Integrales que Involucran a la Función Hipergeométrica Generalizada de Wright

En esta sección evaluaremos algunas integrales simples y dobles que involucran a la función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_p\Psi_q(z)$. Como casos particulares se obtienen las correspondientes integrales con las funciones hipergeométricas ${}_pF_q(z)$ y ${}_2R_1^{\tau}(z)$.

3.1. Integrales simples

Sea

$$ I=\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\beta-1}{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};-wx\right]dx. $$

Usando la definición de ${}_p\Psi_q(z)$ dada en (1) tenemos:

$$ I=\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\beta-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{(-wx)^k}{k!}\right]dx. $$

Intercambiando el orden de la integral y la suma en base a la convergencia absoluta [16, p. 430, No. (14-31)], tenemos:

$$ I=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{(-w)^k}{k!}\left[\int_0^y x^{\lambda+k-1}(y-x)^{\beta-1}dx\right]. $$

Sea $I_1=\int_0^y x^{\lambda+k-1}(y-x)^{\beta-1}dx$.

Haciendo en esta integral el cambio de variable $x=yt$ y de la definición de la función Beta [17]:

$$I_1 = y^{\lambda+\beta+k-1} B(\lambda+k,\beta) = y^{\lambda+\beta+k-1}\frac{\Gamma(\lambda+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\lambda+\beta+k)},$$

sustituyendo I_1 en I:

$$I = \Gamma(\beta) y^{\lambda+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{(-wy)^k}{k!}\times \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda+\beta+k)}.$$

Usando la representación en serie para ${}_p\Psi_q(z)$ se tiene finalmente:

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\beta-1}\,{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};-wx\right]dx = = \Gamma(\beta)y^{\lambda+\beta-1}\,{}_{p+1}\Psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(\lambda,1)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(\lambda+\beta,1)\end{matrix};-wy\right] \tag{5}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$; $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó

$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1$ si $|-wy|<\dfrac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}}$; ó $p=q+1$,

$A_1=1$; $A_{j+1}=B_j$ con $j=1,2,\ldots,q$,

$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\beta\right)>0$ si $|-wy|=1$.

De manera análoga se obtienen los resultados dados a continuación.

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}\,{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};1-\frac{x}{y}\right]dx = = \Gamma(\lambda)y^{\lambda+r-1}\,{}_{p+1}\Psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(r,1)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(\lambda+r,1)\end{matrix};1\right] \tag{6}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó

$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1$ si $\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}<\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}$; ó

$p=q+1$, $A_1=1$; $A_{j+1}=B_j$ con $j=1,2,\ldots,q$,

$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\lambda\right)>0$.

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}e^{-sx}\,{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};1-\frac{x}{y}\right]dx = = y^{\lambda+r-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+k)(-sy)^k}{k!}\times {}_{p+1}\Psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(r,1)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(\lambda+r+k,1)\end{matrix};1\right] \tag{7}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó

$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1$ si $\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}<\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}$; ó

$p=q+1$, $A_1=1$; $A_{j+1}=B_j$ con $j=1,2,\ldots,q$,

$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\lambda\right)>0$.

$$\int_0^y \frac{x^{r-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\rho}}\,{}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};wx\right]dx = = \frac{y^{r+\beta-1}}{\Gamma(\rho)(1-zy)^{\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+k)\Gamma(\beta+k)}{k!}\left(\frac{zy}{zy-1}\right)^k\times {}_{p+1}\Psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(r,1)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(r+\beta+k,1)\end{matrix};wy\right] \tag{8}$$

y, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $|\arg(1-zy)|<\pi$;

$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1$ si

$|wy|<\dfrac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}}$; ó $p=q+1$, $A_1=1$; $A_{j+1}=B_j$

con $j=1,2,\ldots,q$, $\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\beta\right)>0$ si

$|wy|=1$.

Dado que la función ${}_p\Psi_q$ es un caso especial de la función H de Fox, los resultados (5)-(8) pueden también obtenerse como casos particulares de ésta [18, p. 61, No. (5.2.2)].

3.2. Integrales dobles

Sea

$$I=\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\beta-1}y^{\lambda+\beta}(1-y)^{\nu-1}(1-xy)^{\delta}\times {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};c(1-x)^m y^m(1-y)^n\right]dxdy$$

De la definición de ${}_p\Psi_q(z)$ tenemos:

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{c^k}{k!}\int_0^1 y^{\lambda+\beta+mk}(1-y)^{\nu-1+nk}\times$$
$$\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\beta+mk-1}(1-xy)^{\delta}dx\,dy$$

donde hemos intercambiado el orden de la integral y la suma. Evaluando la integral interna mediante la representación integral de ${}_2F_1(z)$ resulta:

$$I=\Gamma(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{\Gamma(\beta+mk)}{\Gamma(\lambda+\beta+1+mk)}\frac{c^k}{k!}\times$$
$$\int_0^1 y^{\lambda+\beta+mk}(1-y)^{\nu+nk-1}\times$$
$${}_2F_1(-\delta,\lambda+1;\lambda+\beta+1+mk;y)dy.$$

Aplicando el siguiente resultado: [19, p. 849, No. (7.512.4)]

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\varrho-1}{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)dx=$$
$$=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\varrho)\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma+\varrho-\alpha)\Gamma(\gamma+\varrho-\beta)}$$
$$\mathrm{Re}(\gamma)>0,\ \mathrm{Re}(\varrho)>0,\ \mathrm{Re}(\gamma+\varrho-\alpha-\beta)$$

para evaluar la integral tenemos:

$$I=\Gamma(\lambda+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\times$$
$$\frac{\Gamma(\beta+mk)\Gamma(\nu+nk)\Gamma(\beta+\delta+\nu+mk+nk)}{\Gamma(\lambda+\beta+\delta+\nu+1+mk+nk)\Gamma(\beta+\nu+mk+nk)}\frac{c^k}{k!}$$

esto es,

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\beta-1}y^{\lambda+\beta}(1-y)^{\nu-1}(1-xy)^{\delta}\times$$
$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};c(1-x)^m y^m(1-y)^n\right]\times$$
$$dxdy=\Gamma(\lambda+1)\,{}_{p+3}\Psi_{q+2}\times$$
$$\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(\beta,m),(\nu,n),(\beta+\delta+\nu,m+n)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(\lambda+\beta+\delta+\nu+1,m+n),(\beta+\nu,m+n)\end{matrix};c\right]\tag{9}$$

m,n, $\mathrm{Re}(\lambda+1)$, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(\beta+\delta+\nu)$, $\mathrm{Re}(\nu)>0$;
$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1$ si

$$|c|<\frac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}}.$$

Mediante un procedimiento análogo se obtienen los siguientes resultados:

$$\iint_{\substack{x,y\ge0\\x+y\le1}} x^{\lambda-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\nu-1}\times$$
$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};cx^m y^n\right]dxdy=$$
$$=\Gamma(\nu)\,{}_{p+2}\Psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(\lambda,m),(\beta,n)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q),(\lambda+\beta+\nu,m+n)\end{matrix};c\right]\tag{10}$$

m,n, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(\nu)>0$; $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<1$; ó

$$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=1\ \text{si}\ |c|<\frac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}}.$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\lambda-1}y^{\beta-1}e^{-ax-by}\times$$
$${}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};c\,x^m y^n\right]dxdy=$$
$$=\frac{1}{a^{\lambda}b^{\beta}}\,{}_{p+2}\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\ldots,(a_p,A_p),(\lambda,m),(\beta,n)\\(b_1,B_1),\ldots,(b_q,B_q)\end{matrix};\frac{c}{a^m b^n}\right]\tag{11}$$

m,n, $\mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Re}(b)$, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$;
$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j+m+n<1$; ó
$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j+m+n=1$ si

$$\left|\frac{c}{a^m b^n}\right|<\frac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}m^m n^n}.$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{\lambda-1}y^{\lambda}e^{-ax^2-by^2}\times$$
$$ {}_p\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\dots,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),\dots,(b_q,B_q)\end{matrix};c\,x\,y\right]dxdy=\frac{1}{4a^{\lambda/2}b^{(\lambda+1)/2}}\times$$
$$ {}_{p+2}\Psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\dots,(a_p,A_p),(\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}),(\frac{\lambda+1}{2},\frac{1}{2})\\(b_1,B_1),\dots,(b_q,B_q)\end{matrix};\frac{c}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\right] \tag{12}$$

$\mathrm{Re}(a)$, $\mathrm{Re}(b)$, $\mathrm{Re}(\lambda)>0$; $\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j<0$; ó

$$\sum_{j=1}^{p}A_j-\sum_{j=1}^{q}B_j=0 \text{ si } \left|\frac{c}{\sqrt{a}\sqrt{b}}\right|<2\frac{\prod_{j=1}^{q}(B_j)^{B_j}}{\prod_{j=1}^{p}(A_j)^{A_j}}.$$

4. Casos Particulares

En esta sección se obtienen como casos particulares de las integrales generalizadas mencionadas anteriormente las correspondientes integrales con las funciones hipergeométricas ${}_pF_q(z)$ y ${}_2R_1^{\tau}(z)$.

4.1. Integrales simples

i) Haciendo

$$A_1=A_2=\ldots=A_p=1;\ B_1=B_2=\ldots=B_q=1,$$

y usando (2) tenemos respectivamente de (5)-(8):

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\beta-1}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p\\b_1,b_2,\dots,b_q\end{matrix};-wx\right]dx=$$
$$=B(\lambda,\beta)y^{\lambda+\beta-1}\ {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p,\lambda\\b_1,b_2,\dots,b_q,\lambda+\beta\end{matrix};-wy\right] \tag{13}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$; $p\le q$; ó $p=q+1$ si $|\arg(1+wy)|<\pi$; ó $p=q+1$,
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\beta\right)>0 \text{ si } |-wy|=1.$$

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p\\b_1,b_2,\dots,b_q\end{matrix};1-\frac{x}{y}\right]dx=$$
$$=B(\lambda,r)y^{\lambda+r-1}\ {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p,r\\b_1,b_2,\dots,b_q,\lambda+r\end{matrix};1\right] \tag{14}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $p\le q$; ó $p=q+1$ con
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\lambda\right)>0.$$

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}e^{-sx}{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p\\b_1,b_2,\dots,b_q\end{matrix};1-\frac{x}{y}\right]dx=$$
$$=y^{\lambda+r-1}\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+k)(-sy)^k}{\Gamma(\lambda+r+k)k\,!}\times$$
$$ {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p,r\\b_1,b_2,\dots,b_q,\lambda+r+k\end{matrix};1\right] \tag{15}$$

y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $p\le q$; ó $p=q+1$ con
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\lambda\right)>0.$$

$$\int_0^y \frac{x^{r-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\rho}}\ {}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p\\b_1,b_2,\dots,b_q\end{matrix};wx\right]dx=$$
$$=\frac{y^{r+\beta-1}\Gamma(r)}{\Gamma(\rho)(1-zy)^{\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(r+\beta+k)k\,!}\left(\frac{zy}{zy-1}\right)^k\times$$
$$ {}_{p+1}F_{q+1}\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_p,r\\b_1,b_2,\dots,b_q,r+\beta+k\end{matrix};wy\right] \tag{16}$$

y, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $|\arg(1-zy)|<\pi$; $p\le q$; ó $p=q+1$ si $|\arg(1-wy)|<\pi$; ó $p=q+1$,
$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{p}a_j+\beta\right)>0 \text{ si } |wy|=1.$$

ii) Para $p=2$; $q=1$; $a_1=a$; $a_2=b$; $b_1=c$; $A_1=1$; $A_2=\tau$; $B_1=\tau$; usando (1) y (3) en (5)-(8) resulta:

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{\beta-1}{}_2R_1^{\tau}(a,b;c;-wx)dx=$$
$$B(\lambda,\beta)y^{\lambda+\beta-1}{}_3R_2^{\tau}(a,b,\lambda;c,\lambda+\beta;-wy) \tag{17}$$

$\tau\in\mathbb{R}$, $\tau>0$; y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$; $|-wy|<1$; ó $\mathrm{Re}(c+\beta-a-b)>0$ si $|-wy|=1$.

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}{}_2R_1^{\tau}(a,b;c;1-\frac{x}{y})dx=$$
$$B(\lambda,r)y^{\lambda+r-1}{}_3R_2^{\tau}(a,b,r;c,\lambda+r;1) \tag{18}$$

$\tau\in\mathbb{R}$, $\tau>0$; y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r)>0$; $\mathrm{Re}(c+\lambda-a-b)>0$.

Tabla 1

De la ec.	Valores particulares de los parámetros	Ref. del result. conocido
(5)	$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c;$ $A_1 = A; A_2 = B; B_1 = C$	1, p. 19, No. (3.1)
(6)	$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c;$ $A_1 = A; A_2 = B; B_1 = C; r = c$	1, p. 22, No. (3.5)
(13)	$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c$	20, p.314, No. (2.21.1.4)
(14)	$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c; r = c$	20, p.315, No. (2.21.1.11)
(15)	$p = 2; q = 1; s = p; r = c;$ $a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c$	20, p.320, No. (2.21.2.12)
(16)	$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c; r = c$	20, p.316, No. (2.21.1.20)
(16)	$p = 2; q = 1; w = 1/y; r = c;$ $a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c$	20, p.316, No. (2.21.1.22)

$$\int_0^y x^{\lambda-1}(y-x)^{r-1}e^{-sx}\,{}_2R_1^{\tau}(a,b;c;1-\frac{x}{y})dx = y^{\lambda+r-1}\Gamma(r)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\lambda+k)(-sy)^k}{\Gamma(\lambda+r+k)k!}\times {}_3R_2^{\tau}(a,b,r;c,\lambda+r+k;1) \tag{19}$$

$\tau \in \Re$, $\tau > 0$; y, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(r) > 0$; $\mathrm{Re}(\lambda + c - a - b) > 0$.

$$\int_0^y \frac{x^{r-1}(y-x)^{\beta-1}}{(1-xz)^{\rho}}\,{}_2R_1^{\tau}(a,b;c;wx)dx = \frac{y^{r+\beta-1}\Gamma(r)}{\Gamma(\rho)(1-zy)^{\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\rho+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(r+\beta+k)k!}\left(\frac{zy}{zy-1}\right)^k\times {}_3R_2^{\tau}(a,b,r;c,r+\beta+k;wy) \tag{20}$$

$\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; y, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(r) > 0$; $|\arg(1-zy)| < \pi$; $|wy| < 1$; ó $\mathrm{Re}(c + \beta - a - b) > 0$ si $|wy| = 1$.

iii) Muchos otros casos particulares pueden obtenerse de los resultados dados en la sección 3, algunos de ellos se indican en la Tabla 1.

4.2. Integrales dobles

i) Si en (9) se hace

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_p = 1;\ B_1 = B_2 = \ldots = B_q = 1;$$

$m, n \in \mathbb{Z}^+$ y se usa (2) se tiene el resultado dado en la referencia [20, p. 379, No. (4.2.4.2)].

ii) Si en (11) y (12) se hace

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_p = 1;\ B_1 = B_2 = \ldots = B_q = 1,$$

usando (2) se obtienen los resultados dados en [20, p. 380, Nos. (4.2.4.5), (4.2.4.7)] respectivamente.

iii) Si en (9) y (10) se hace

$$p = 2; q = 1; a_1 = a; a_2 = b; b_1 = c;$$
$$A_1 = 1; A_2 = \tau; B_1 = \tau; c = r;$$

y usando (1) y (3) se tiene respectivamente:

$$\int_0^1\int_0^1 x^{\lambda}(1-x)^{\beta-1}y^{\lambda+\beta}(1-y)^{\nu-1}(1-xy)^{\delta}\times {}_2R_1^{\tau}\left(a,b;c;r(1-x)^m y^m(1-y)^n\right)dxdy = \Gamma\left[\begin{matrix}\lambda+1, c\\ a, b\end{matrix}\right]\times {}_5\Psi_3\left[\begin{matrix}(a,1),(b,\tau),(\beta,m),(\nu,n),(\beta+\delta+\nu,m+n)\\(c,\tau),(\lambda+\beta+\delta+\nu+1,m+n),(\beta+\nu,m+n)\end{matrix};r\right] \tag{21}$$

$\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; m, n, $\mathrm{Re}(\lambda+1)$, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(\beta+\delta+\nu)$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$; $|r| < 1$.

$$\iint\limits_{\substack{x,y\ge 0\\ x+y\le 1}} x^{\lambda-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\nu-1}\,{}_2R_1^{\tau}\left(a,b;c;r\,x^m y^n\right)dxdy = \Gamma(\nu)\,{}_4\Psi_2\left[\begin{matrix}(a,1),(b,\tau),(\lambda,m),(\beta,n)\\(c,\tau),(\lambda+\beta+\nu,m+n)\end{matrix};r\right] \tag{22}$$

$\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; m, n, $\mathrm{Re}(\lambda)$, $\mathrm{Re}(\beta)$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$; $|r| < 1$.

Referencias Bibliográficas

1. Chirino A.: "Algunos Resultados sobre la Función Hipergeométrica de Wright". Universidad del Zulia. Tesis de Magíster, 1994.
2. Virchenko N. A.: On some generalizations of the functions of hypergeometric type. Fractional Calculus & Applied Analysis 2, No. 3 (1999), 233-244.
3. Kilbas A. A., Saigo M. and Trujillo J. J.: On the generalized hypergeometric function. Fractional Calculus & Applied Analysis 5, No. 4 (2002), 437-460.
4. Wright E. M.: The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. Jour. London Math. Soc. 10 (1935), 286-293.
5. Srivastava H.M. and Karlsson P.W.: "Multiple Gaussian Hypergeometric Series". Ellis Horwood Limited. England, 1985.
6. Dimovski I. and Kiryakova V.: Generalized Poisson transmutations and corresponding representations of hyper-Bessel functions. C.R. Acad. Bulgare Sci. 39 (1986), 29-32.
7. Dotsenko M.: On some applications of Wright's hypergeometric functions. C.R. Acad. Bulgare Sci. 44 (1991), 13-16.
8. Kiryakova V. S.: "Generalized Fractional Calculus and Applications" (Pitman Res. Notes in Math. Ser., 301). Longman, Harlow, 1994.
9. Love E. R.: Some integral equations involving hypergeometric functions. Proc. Edinbourgh Math. Soc. 15 (1967), 169-198.
10. Oldham K. B. and Spanier J.: "The Fractional Calculus". Acad. Press, New York, 1974.
11. Saigo M. and Glaeske H. J.: Fractional calculus operators involving the Gauss functions on spaces $F_{p,\mu}$ and $F'_{p,\mu}$. Math. Nachr. 147 (1990), 285-306.
12. Samko S., Kilbas A. and Marichev O.: "Fractional Integrals and Derivatives; Theory and Applications". Gordon and Breach. London, 1993.
13. Stanković B.: On the function of E. M. Wright. Public. de I 'institut. Math. 10 (1970), 113-124.
14. Yakubovich S., Tuan Vu, Marichev O. and Kalla S.: One class of index integral transforms. Rev. Téc. Ing. Universidad del Zulia, Vol. 10 (1987), 105-118.
15. Virchenko N., Kalla S. L. and Al-Zamel A.: Some results on a generalized hypergeometric function. Integral Transforms and Special Functions 12, No. 1 (2001), 89-100.
16. Apostol T.: "Análisis Matemático". Editorial Reverté S.A., México, 1a. edición, 1940.
17. Lebedev N. N.: "Special Functions and Applications". Dover Publications Inc., New York, 1965.
18. Srivastava H. M., Gupta K. C. and Goyal S. P.: The H-Functions of One and Two Variables with Applications. South Asian Publishers, New Delhi, 1982.
19. Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M.: "Table of Integral, Series and Products". Academic Press, New York, 1965.
20. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A. and Marichev O.I.: "Integrals and Series". Vol. 3. Gordon and Breach Science Publishers. New York, 1990.

Recibido el 24 de Febrero de 2003
En forma revisada el 26 de Enero de 2004