

Robust filters for fault detection: An LMI control setting

Addison Ríos-Bolívar¹ y Germain García²

¹Departamento de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes.
Mérida 5101, Venezuela. Tel. +58 274.240.28.47. Fax 274.240.38.73. ilych@ula.ve

²LAAS-CNRS. 7 Avenue du Colonel Roche. 31077 Toulouse Cedex 4, France.
Tel. +33 561.33.64.49. garcia@laas.fr

Abstract

Starting from the narrow relationship between robust filtering and the design of robust filters to fault detection, an approach for fault detection and diagnosis robust filter design in linear systems is presented. The method consists on transforming the problem of robust detection of faults in a problem of robust control based on Linear Matrix Inequalities (LMI). The transformation is obtained by means of the design of a dynamic system (post-filter), which is obtained through the synthesis of robust controllers based on LMI. Thus, performance index in \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_∞ , and multi-objective criteria ($\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$) can be obtained. This formulation allows the application of any technique of robust control based on LMI's, and the robust fault detection and isolation is guaranteed.

Key words: Fault detection, linear matrix inequalities (LMI) control, \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_∞ control, robust estimation.

Filtros robustos de detección de fallas: Un escenario en control LMI

Resumen

Se presenta un método para el diseño de filtros robustos para la detección y el diagnóstico de fallas en sistemas lineales a partir de un post-filtro, el cual se obtiene a través de la síntesis de controladores robustos basados en LMI. Mediante esta formulación, el problema de filtraje para la detección y separación de fallas se convierte en un problema de control óptimo en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ por realimentación dinámica de la salida medida, cuya solución resulta en la dinámica del post-filtro. La construcción del filtro de detección se realiza en dos etapas a objeto de procurar, con un solo sistema de filtraje, la detección y el aislamiento de múltiples fallas, en presencia de señales de perturbación e incertidumbres. La formulación permite la aplicación de cualquier técnica de control robusto basada en LMI's.

Palabras clave: Filtros robustos de detección de fallas, filtraje óptimo, control óptimo, LMI, estimación robusta.

1. Introducción

La complejidad de los sistemas de producción exige la construcción de sofisticados dispositivos que garanticen adecuados niveles de seguridad y productividad. Dentro de estos elementos se encuentran los sistemas de confiabilidad y

monitoreo de procesos, los cuales están fundamentados en los mecanismos de diagnóstico y detección de fallas.

El elemento fundamental en un sistema de supervisión, monitoreo y diagnóstico de fallas es el Filtro de Detección y Diagnóstico de Fallas, filtro FDI, el cual debe ser diseñado para operar en

condiciones adversas debido a la presencia de señales externas desconocidas, de las incertidumbres y a los distintos regímenes de operación de los procesos.

En este contexto, la estimación o filtraje robusto en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ y los filtros de detección de fallas tienen, en común, muchas relaciones: en ambos problemas se busca el diseño de un sistema dinámico (filtro) bajo condiciones de estabilidad asintótica y manejo de perturbaciones e incertidumbres.

Para la estimación robusta en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ se busca generar un estimado óptimo del vector de estado del sistema, o una combinación lineal de ellos, a pesar de la presencia de señales de perturbación de energía acotadas y/o incertidumbres del modelo. La medida del desempeño del filtrado se establece mediante criterios basados en la norma-2, norma- ∞ o combinaciones de ellas (multi-objetivos) sobre la función de transferencia de la salida del error de estimación respecto a las señales de perturbación [1-3].

En el problema de síntesis de filtros de detección y diagnóstico de fallas robustos la primera fase consiste en la generación de residuales, los cuales se utilizan, posteriormente, para el proceso de diagnóstico. Esa generación de residuales pasa por la construcción de un sistema dinámico (filtro), el cual debe generar dichos residuos, solamente en la situación de fallas, a través de las señales medidas y estimadas y bajo la presencia de incertidumbres en el modelo y de señales de perturbación [4-6].

Esta relación entre la estimación robusta en \mathcal{H}_2 y \mathcal{H}_∞ y los filtros de detección y diagnóstico de fallas ha sido explotada precisamente para diseñar éstos últimos [4]. En este caso, se busca la detección de fallas en presencia de perturbaciones, con la mejor sensibilidad posible, por lo que, en la mayoría de los casos, a pesar de que se cumplan las condiciones geométricas de separabilidad de fallas, el problema de diagnóstico es ubicado en un segundo nivel y la separación de las fallas se logra por un filtrado múltiple [7]. De igual manera, el problema ha sido formulado como un problema de acoplamiento de modelo en \mathcal{H}_∞ , cuya solución basada en LMI deriva en un filtro robusto de FDI [8].

Para la robustez, la medida de sensibilidad de un FDI se puede caracterizar como la relación

del nivel de atenuación de la salida del filtro con respecto a las fallas al nivel de atenuación del filtro respecto a la perturbación, esto es,

$$S_{2f} = \frac{\|H_{e_z v_i}\|_2}{\|H_{e_z w}\|_2}; S_{\infty f} = \frac{\|H_{e_z v_i}\|_\infty}{\|H_{e_z w}\|_\infty}, \quad (1)$$

donde v_i son las fallas, w la perturbación y e_z el error de estimación.

En el contexto de la síntesis de FDI robustos como una caracterización del diseño de un controlador robusto es planteada por [7] bajo una formulación de técnicas multi-objetivos, con el inconveniente de la construcción de múltiples filtros para el problema de separación de fallas y además, no existe un procedimiento sistemático de síntesis. Aplicando el diseño de controladores óptimos en \mathcal{H}_∞ , en [6] se propone el diseño de un post-filtro para asegurar un nivel adecuado de atenuación de la perturbación, lo cual permite la detección y la separación de fallas en un paso.

En el marco de estas ideas, se propone la estrategia de un post-filtro en el diseño del filtro robusto de detección de fallas, cuya construcción es por la vía de la síntesis de controladores óptimos basados en las LMI's. Los controladores se construyen por realimentación dinámica de la salida medida y criterios en \mathcal{H}_2 y/o \mathcal{H}_∞ , mismos que derivan en el post-filtro para la detección y diagnóstico simultáneamente.

Consideremos un sistema en espacio de estados representado por:

$$\sum_1 \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_1 x(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D w(t) \end{cases}, \quad (2)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ son los estados, $z \in \mathbb{R}^m$ es la señal a ser estimada a partir de $y \in \mathbb{R}^p$, las señales de salida medidas; $w \in \mathcal{L}_2$ es la señal de perturbación y las matrices A , B_1 , C_1 , C_2 y D tienen dimensiones adecuadas. (A, B_1) es estabilizante y (A, C_2) es detectable. La idea es entonces, determinar, en primer lugar, la existencia de un sistema dinámico, denominado filtro y representado por \mathcal{F} , el cual, a partir de la señal de salida medida, $y(t)$, permita generar un estimado, \hat{z} , de la señal z bajo dos preceptos: El filtro debe ser asintóticamente estable

en el entendido de que en ausencia de perturbación y en tiempo límite se tenga un error de estimación nulo. Segundo, bajo la naturaleza de la perturbación, el efecto de dicha perturbación a la salida del error de estimación debe ser mínimo [1, 2, 8]. Esto es, \mathcal{F} debe ser tal que:

- $\hat{z}(t) = \mathcal{F}y(t)$
- Si $e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ y $w(t) = 0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = 0$
- Si $H_{e_z w}$ es la función de transferencia del error de estimación a la perturbación:

• En el enfoque \mathcal{H}_2 , entonces

$$\|H_{e_z w}(s)\|_2 < \mu, \quad \mu = 0$$

• En el enfoque \mathcal{H}_∞ , los valores singulares máximos de $H_{e_z w}(s)$ deben ser mínimos, o menor que un cierto nivel de atenuación $\gamma > 0$, es decir,

$$\sup_{0 \neq w \in L_2} \frac{\|e_z\|_2^2}{\|w\|_2^2} = \|H_{e_z w}\|_\infty < \gamma. \quad (3)$$

Un filtro admisible es de la forma:

$$\mathcal{F}_L \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - C_2\hat{x}(t)) \\ \hat{z}(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases}, \quad (4)$$

donde L es una matriz de ganancia a ser diseñada. Soluciones al problema son mostradas en [1, 2, 9-11].

Una formulación del problema de filtraje robusto que involucra incertidumbres en los modelos se puede encontrar en [3, 12], lo cual permite una generalización de los métodos y la aplicación de las LMI's.

Otro aspecto resaltante, dentro del contexto de rechazo a perturbaciones, es la síntesis de controladores óptimos en \mathcal{H}_∞ a objeto de atenuar el efecto de las perturbaciones en una cierta salida controlada vía realimentación dinámica de la salida medida, cuya solución se presenta en [13-16].

2. Formulación del Problema

La idea que se persigue es transformar el problema de filtraje en un problema de control mediante el diseño de un Post-Filtro, cuyas res-

tricciones son propias del diseño de sistemas de control (contralabilidad y observabilidad). La notación que se empleará es la estándar: para matrices y vectores $()^T$ indica transposición. En las particiones de matrices simétricas $(o)^T$ denota cada uno de sus bloques simétricos. I es la matriz identidad de dimensión apropiada. Para las aplicaciones lineales, $I_m(o)$ denota el sub-espacio imagen del argumento.

La estrecha relación entre el filtraje robusto y la generación de residuos para la detección robusta de fallas permite que se puedan derivar métodos de diagnóstico de fallas soportados por el filtraje robusto. Así, se considerará el diseño del filtraje robusto basado en un post-filtro para luego derivar un detector robusto de fallas [6].

La formulación del problema de filtraje en \mathcal{H}_∞ y su solución se puede plantear en el marco de un post-filtro, el cual es un sistema dinámico a diseñar y que denotaremos por \mathcal{F}_p , cuya excitación es una señal de innovación compuesta por la diferencia entre salida medida y su estimado, y genera una señal a utilizarse en la dinámica del filtro primario.

Reconsideremos dinámicamente el filtro \mathcal{F}_L , al incorporar una señal de control en pre-adelanto, esto es,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + L(y(t) - C_2\hat{x}(t)) - B_e u_e(t) \\ \hat{z}(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases}; \quad (5)$$

donde $u_e(t)$, como ya se dijo, representa un control, y B_e una matriz de control de dimensión apropiada. Esta señal de control se obtendría a partir del post-filtro.

Como consecuencia, la dinámica del error de estimación corresponde a

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = (A - LC_2)e_x(t) + (B_1 - LD)w(t) + B_e u_e(t) \\ e_z(t) = C_1 e_x(t) \end{cases}. \quad (6)$$

Podemos notar que si $B_e = -(B_1 - LD)$ y $u_e = w$, se logra desacoplar (rechazar) completamente la perturbación. La reconstrucción de w se puede obtener a partir de (2), si consideramos, por ejemplo, que $V = D^T D$ es no singular, entonces, por la dinámica inversa, esto es,

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = (A + B_1 V^{-1} D^T C_2)\zeta(t) - B_1 V^{-1} D^T y(t) \\ u_e(t) = V^{-1} D^T C_2 \zeta(t) - V^{-1} D^T y(t) \end{cases}; \quad (7)$$

Como restricción de diseño, se debe tener presente que el par $(\tilde{A}, \mathbf{B}_e)$ debe ser controlable y el par (\tilde{A}, C_2) observable.

Sea un controlador por realimentación dinámica de la salida definido por el sistema (9).

Entonces, en lazo cerrado se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= A e_x(t) + B w(t) \\ e_z(t) &= C e_x(t) + D w(t) \end{aligned} \tag{13}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} + \hat{D}C_2 & \hat{C} \\ \mathbf{B}_p C_2 & \mathbf{A}_p \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 + \hat{D}D_{21} \\ \mathbf{B}_p D_{21} \end{pmatrix}$$

$$C = (C_1 + D_{12} \mathbf{D}_p C_2 \quad D_{12} \mathbf{C}_p), \tag{14}$$

$$D = D_{12} \mathbf{D}_p D_{21} + D_{11} \text{ y } \hat{C} = \mathbf{B}_e \mathbf{C}_p, \hat{D} = \mathbf{B}_e \mathbf{D}_p \tag{15}$$

Por lo tanto, la función de transferencia $H_{e_z w}(s)$ está dada por:

$$H_{e_z w}(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = C(sI - A)^{-1} B + D. \tag{16}$$

3.1. Problema de control en \mathcal{H}_2

En este caso se debe diseñar \mathbf{B}_e y el controlador definido por (9) tal que $\|H_{e_z w}\|_2 < \mu, \mu > 0$.

Se sabe que $\|H_{e_z w}\|_2^2 < \mu$ si y sólo si $D = 0$ y existe $X > 0$ tal que [16, 18]:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T & B \\ (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} W & CX \\ (o)^T & X \end{bmatrix} > 0, \tag{17}$$

$$tr[W] < \mu.$$

Proposición 3.1.

Sea el sistema definido por (12). Dicho sistema es estabilizable por un controlador dinámico dado por (9), tal que $\|H_{e_z w}\|_2^2 < \mu$ si y sólo si existen matrices de orden n simétricas $X > 0$ y $Y > 0$; las matrices $G, L \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $F \in \mathbb{R}^{n \times p}, R \in \mathbb{R}^{q \times p}, M \in \mathbb{R}^{q \times n}, N \in \mathbb{R}^{n \times p}$; y la matriz simétrica $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$, tal que se satisfacen las siguientes LMI's:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}X + X\tilde{A}^T + L + L^T & \tilde{A} + \mathbf{N}C_2 + G^T & \tilde{B}_1 + \mathbf{N}D_{21} \\ (o)^T & Y\tilde{A} + \tilde{A}^T Y + FC_2 + C_2^T F^T & Y\tilde{B}_1 + \mathbf{F}D_{21} \\ (o)^T & (o)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} W & C_1 X + D_{12} M & C_1 + D_{12} R C_2 \\ (o)^T & X & I \\ (o)^T & (o)^T & Y \end{bmatrix} > 0, \tag{19}$$

$$tr[W] < \mu, \quad D = D_{12} R D_{21} + D_{11} = 0. \tag{20}$$

La matriz de control \mathbf{B}_e se obtiene por

$$\mathbf{B}_e = LM^T(MN^T)^{-1}. \tag{21}$$

El controlador estabilizante está dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^{-1} & -V^{-1}Y \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -Y\tilde{A}X & F \\ L & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ -C_2 X U^{-1} & I \end{pmatrix} \tag{22}$$

donde $C_p = (B_e^T B_e)^{-1} B_e^T \hat{C}$, $D_p = R$ y V, U son matrices no singulares que satisfacen $YX + VU = I$.

Prueba

La prueba se fundamenta en el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables [16]. Sean las transformaciones matriciales

$$T = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & V^T \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} X & U^T \\ U & Y \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} Y & V \\ V^T & X \end{pmatrix}. \tag{23}$$

En primer lugar, de las transformaciones se deriva $YX + VU = I$.

Para obtener desigualdades lineales, la primera desigualdad en (17) se multiplica por la derecha por $\tau := \text{diag}[T, I]$ y por la izquierda por τ^T . La segunda desigualdad en (17) se multiplica por la derecha $J := \text{diag}[I, T]$, y por la izquierda por J^T . De allí surgen expresiones tales como: $T^T A X T$, $T^T X T$, $T^T B$, y $C X T$, donde

$$T^T A X T = \begin{pmatrix} \tilde{A}X + \hat{D}C_2 X + \hat{C}U & \tilde{A} + \hat{D}C_2 \\ Y\tilde{A}X + Y\hat{D}C_2 X + Y\hat{C}U + YB_p C_2 X + VA_p U & Y\tilde{A} + Y\hat{D}C_2 + YB_p C_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} T^T X T &= \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \\ T^T \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{Y} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_{21} + \mathbf{V} \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{C} X \mathbf{T} = (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_p \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_p \mathbf{U} \quad \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_p \mathbf{C}_2). \quad (26)$$

Así, la linealización de las desigualdades se alcanza con los cambios de variables

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X} \ 0), \quad (27)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}_p \mathbf{C}_2 \mathbf{X} + \mathbf{C}_p \mathbf{U}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{D}_p. \quad (28)$$

Del cambio de variables se deriva la relación $\mathbf{L} = \mathbf{B}_e \mathbf{M}$, la cual permite obtener la matriz de control a diseñar considerando la existencia de la matriz pseudo-inversa para \mathbf{M} , ya que ella no siempre es cuadrada e invertible. De igual manera, las relaciones que definen las matrices del controlador se obtienen devolviendo los cambios de variables.

Estos resultados se pueden aplicar al caso particular del sistema definido por (11), para el cual $D=0$, y se obtiene así, la dinámica del post-filtro, para atenuar el efecto de las perturbaciones de manera óptima.

3.2. Problema de control en \mathcal{H}_∞

En este enfoque se debe diseñar \mathbf{B}_e y el controlador definido por (9) tal que $\|H_{e_z w}\|_\infty < \gamma, \gamma > 0$.

Del Lema Real Acotado, se sabe que $\|H_{e_z w}\|_\infty < \gamma$ si y sólo si existe $\mathbf{X} > 0$ tal que [13, 18]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}^t & \mathbf{B} & \mathbf{X} \mathbf{C}^t \\ (o)^t & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}^t \\ (o)^t & (o)^t & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

Proposición 3.2.

Sea el sistema definido por (12). Ese sistema es estabilizable por un controlador dinámico dado por (9), tal que $\|H_{e_z w}\|_\infty < \gamma$ si y sólo si existen matrices de orden n simétricas $\mathbf{X} > 0$ y $\mathbf{Y} > 0$; las ma-

trices $\mathbf{Q}, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$; las matrices $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ y $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times p}$; tal que se satisfacen las siguientes LMI's:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X} + \mathbf{X} \tilde{\mathbf{A}}^t + \mathbf{L} + \mathbf{L}^t & \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{N} \mathbf{C}_2 + \mathbf{Q}^t & \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{N} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{X} \mathbf{C}_1^t + \mathbf{M}^t \mathbf{D}_{12}^t \\ (o)^t & \mathbf{Y} \mathbf{Y} & \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{B}}_1 \mathbf{F} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_1^t + \mathbf{C}_2^t \mathbf{R}^t \mathbf{D}_{12}^t \\ (o)^t & (o)^t & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^t + \mathbf{D}_{21}^t \mathbf{R}^t \mathbf{D}_{12}^t \\ (o)^t & (o)^t & (o)^t & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ (o)^t & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0, \quad (31)$$

donde $(\mathbf{Y} \mathbf{Y}) = \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^t \mathbf{Y} + \mathbf{F} \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_2^t \mathbf{F}^t$.

La matriz de control \mathbf{B}_e está dada por

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{L} \mathbf{M}^t (\mathbf{M} \mathbf{M}^t)^{-1}. \quad (32)$$

El controlador estabilizante está dado por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}^{-1} & -\mathbf{V}^{-1} \mathbf{Y} \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} - \mathbf{Y} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X} & \mathbf{F} \\ \mathbf{L} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{-1} & 0 \\ -\mathbf{C}_2 \mathbf{X} \mathbf{U}^{-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

donde $\mathbf{C}_p = (\mathbf{B}_e^t \mathbf{B}_e)^{-1} \mathbf{B}_e^t \hat{\mathbf{C}}$, $\mathbf{D}_p = \mathbf{R}$, y \mathbf{V}, \mathbf{U} son matrices cuadradas no singulares que satisfacen $\mathbf{Y} \mathbf{X} + \mathbf{V} \mathbf{U} = \mathbf{I}$.

Prueba

Al igual que en el caso anterior, la prueba se sigue por el procedimiento de linealización de las desigualdades matriciales mediante transformación congruente y cambios de variables. En este caso la matriz de transformación corresponde a $\mathcal{T} := \text{diag}[\mathbf{T}, \mathbf{T}, \mathbf{I}]$.

Así, se puede obtener la dinámica del post-filtro con criterios de desempeño en \mathcal{H}_∞ aplicando los resultados precedentes. Siguiendo procedimientos similares se pueden imponer criterios multi-objetivos.

Las proposiciones presentadas constituyen unas herramientas para el filtraje robusto basado en el control por LMI's. Así, el filtraje robusto en \mathcal{H}_2 y en \mathcal{H}_∞ basados en post-filtros se obtienen por control realimentado donde las matrices de la dinámica del post-filtro \mathbf{C}_p y \mathbf{D}_p se determinan seleccionando \mathbf{B}_e de tal forma que $\mathbf{C}_p = (\mathbf{B}_e^t \mathbf{B}_e)^{-1} \mathbf{B}_e^t \hat{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}_p = (\mathbf{B}_e^t \mathbf{B}_e)^{-1} \mathbf{B}_e^t \hat{\mathbf{D}}$. Particularmente, si $\mathbf{B}_e = \mathbf{I}_{n \times n}$, entonces $\mathbf{C}_p = \hat{\mathbf{C}}$ y $\mathbf{D}_p = \hat{\mathbf{D}}$.

4. El Filtro Robusto de Detección de Fallas basado en el Post-Filtro

El diseño de filtros robustos se formula como extensión del problema de filtraje robusto. En conexión con el problema de diseño de FDI, muchos han sido los métodos presentados [19]. Particularmente, en Niemann and Stoustrup [7] se presenta la aplicación de dos técnicas de control multi-objetivo en la síntesis de los filtros. Si bien el problema tiene una excelente solución, la dificultad viene de la separabilidad de las fallas donde es necesaria la construcción de múltiples filtros y además, fundamentalmente se aborda el problema de detección. Otro inconveniente es que no está sistematizado el diseño de los filtros. Mientras que en Zhong *et al.* [9] se utiliza el problema de acoplamiento óptimo de modelos para obtener el filtro. La solución se obtiene mediante LMI's, en las cuales se deben resolver en un gran conjunto. No se aplican criterios multi-objetivos.

Por otro lado, la dificultad principal en el diseño de filtros FDI, si se cumplen las condiciones de condiciones de separabilidad, es que con un solo filtro, por lo general, no se obtiene simultáneamente, la condición de estabilidad asintótica y el aislamiento de las fallas; se llega a un compromiso entre esas dos condiciones, por lo que, eventualmente, se deben concebir múltiples filtros [4, 19]. De allí que intentaremos resolver el problema en la detección robusta, mediante el post-filtraje.

Sobre la base del planteamiento del post-filtro, a continuación se diseñan filtros robustos de detección de fallas.

Sea el sistema dinámico

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) + \sum_{i=1}^f L_i v_i(t), \\ x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C_2 x(t) + D w(t) + \sum_{i=1}^f M_i v_i(t), \end{aligned} \quad (34)$$

donde L_i , M_i representa las *direcciones de fallas* en actuadores y sensores, respectivamente; $v_i(t)$ constituye el *modo de la falla*.

Para la detección de fallas debemos generar los residuales a partir de la estimación de la señal

$$z(t) = C_1 x(t),$$

por medio de un filtro de estimación de estados. En este caso, se busca el rechazo a las perturbaciones y maximizar la sensibilidad respecto a las fallas [5, 6, 8, 19, 20]. Las condiciones que garantizan la detectabilidad y la separabilidad de las fallas corresponde a Massoumnia y Ríos-Bolívar [21, 22]:

Teorema 4.1.

DETECTABILIDAD: Sea el sub-espacio imagen de las direcciones de fallas $W_{L_j} = I_m(L_j)$, $j = 1, 2, \dots, f$. Considérese el modelo de diagnóstico definido por (34), donde el par (C_2, A) es detectable, \mathcal{U}_o el sub-espacio inobservable y $M_i = 0$. Entonces, la i -ésima falla es detectable si

$$W_{L_j} \cap \mathcal{U}_o = \{0\} \quad j = 1, 2, \dots, f; \quad (35)$$

Teorema 4.2.

SEPARABILIDAD: Sea $W_{L_j} = I_m(L_j)$, $j = 1, 2, \dots, f$. Considérese el modelo de diagnóstico definido por (34) y sea \mathcal{D} su sub-espacio observable. Las fallas son separables si cada uno de W_{L_j} y cada una de las direcciones de fallas en la salida del error de estimación están desacoplados; es decir,

$$\left(\text{Im}(M_i) + \mathcal{D}W_{L_i} \right) \cap \left(\text{Im}(M_j) + \sum_{j \neq i}^f \mathcal{D}W_{L_j} \right) = \{0\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, f. \quad (36)$$

Esas condiciones caracterizan las estrategias a seguir para la construcción de los filtros de detección [22].

Para la detección robusta de fallas ahora se aplica la estrategia del post-filtro, para lo cual se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{e}_x(t) = \tilde{A}e_x(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \mathbf{B}_e u_e(t) + \sum_{i=1}^f (L_i - LM_i) v_i(t) \\ e_z(t) = C_1 e_x(t) \\ e_y(t) = C_2 e_x(t) + D w(t) + \sum_{i=1}^f M_i v_i(t) \end{cases} \quad (37)$$

La matriz de control \mathbf{B}_e se conforma en un parámetro de diseño a objeto de derivar un control

admisibles. El control u_e , que se obtiene por optimización aplicando la Proposición 3.1 o la Proposición 3.2, lo cual permite la atenuación de las perturbaciones. De manera que el post-filtro tiende a proporcionar un mejor desempeño en la utilización del filtrado robusto en la detección de fallas.

Comentario 4.1.

La primera fase del diseño consiste en seleccionar L . Para ello se debe garantizar la detección robusta de fallas, lo cual se logra si la distribución de las fallas y las direcciones de las perturbaciones están separadas. Esto es equivalente a una condición de separabilidad falla-perturbación. Entonces, L se debe seleccionar de manera que

$$(\text{Im}(M_i) + \text{Im}(L_i - LM_i)) \cap (\text{Im}(D) + \text{Im}(\tilde{B}_1)) = \{0\} \\ i, j = 1, 2, \dots, f. \quad (38)$$

Esta condición de separabilidad falla-perturbación garantiza que al minimizar los efectos de las perturbaciones en el error de salida, al mismo tiempo se eleva la sensibilidad a las fallas.

Otra alternativa de selección de L corresponde en asignar las fallas a direcciones particulares asociadas a la salida de la dinámica del error. Esto se logra mediante la posible diagonalización de la matriz dinámica del error $A-LC_2$, por lo que puede resultar en una matriz no estable.

- La matriz de control B_e se conforma en un parámetro de diseño. Se debe definir su estructura. En principio se debe corresponder con la estabilizabilidad de la dinámica del error.

Así, la detección robusta de fallas se obtiene por solución del problema de "control", el cual se obtiene a través de las LMI's, vistos los resultados presentados donde criterios multi-objetivos se pueden aplicar.

5. Ejemplo Numérico

Sea el sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -102 & 0 \\ 181 & -171 & 0 \\ 0 & -1,12 \times 10^{-2} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,44 \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 102 \\ 163 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 181 \\ 0 \end{pmatrix} v_1$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,978 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,978 \end{pmatrix} v_2$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,978 \end{pmatrix} x$$

el cual representa el modelo lineal de un *diesel engine actuator* [23]. Dos posibles fallas son consideradas: falla en el actuador y falla en sensor.

De la primera fase del diseño se obtiene L , el cual resulta ser:

$$L = \begin{pmatrix} -102 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1,12 \times 10^{-2} & 10 \end{pmatrix};$$

a objeto de que el sistema dinámico para el error sea

$$\dot{e}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 181 & -171 & 0 \\ 0 & 0 & -9,78 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 4,44 \\ 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 181 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,78 \end{pmatrix} v_2 + B_e u_e$$

$$e_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,978 \end{pmatrix} e_x$$

$$e_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,978 \end{pmatrix} e_x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,978 \end{pmatrix} v_2$$

Se puede observar que a cada salida se le ha asociado una falla de manera de procurar la separabilidad. Para resolver el problema de "control" se asume $v_1 = v_2 = 0$. Aplicando el método de diseño en el caso de \mathcal{H}_∞ y considerando que $B_e \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, entonces se obtienen los siguientes resultados:

$$\gamma = 3,8280 \times 10^{-7}$$

$$A_p = 1,0 \times 10^8 \begin{pmatrix} -0,0000 & -0,1342 & 0 \\ 0,0000 & -2,1035 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3866 \end{pmatrix},$$

$$B_p = 1,0 \times 10^8 \begin{pmatrix} -0,0406 & 0 \\ 1,1883 & 0 \\ 0 & -0,0084 \end{pmatrix}$$

Si se asume que $\mathbf{B}_e = \mathbf{I}_{3 \times 3}$, entonces

$$\mathbf{C}_p = 10 \times 10^7 \begin{pmatrix} -0,0000 & -0,5093 & 0 \\ 0,0000 & 0,3455 & 0 \\ 0 & 0 & -3,7019 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_p = 10 \times 10^7 \begin{pmatrix} -0,0455 & 0 \\ -3,0056 & 0 \\ 0 & -0,0840 \end{pmatrix}$$

La Figura 2 muestra el diagrama de valores singulares máximos de la función de transferencia del error de la salida respecto a la señal de perturbación $w(t)$ y las fallas $v_1(t), v_2(t)$. En virtud de que se satisface la condición de separabilidad falla-perturbación, ecuación (38), minimizando los efectos de las perturbaciones aumenta la sensibilidad a las fallas, tal como se refleja en la Figura 2. Si bien no se hizo consideración en un cierto rango de frecuencia de interés en la solución del problema, tal condición se puede incorporar a los fines del diseño de un post-filtro con múltiples objetivos de desempeño. Se puede

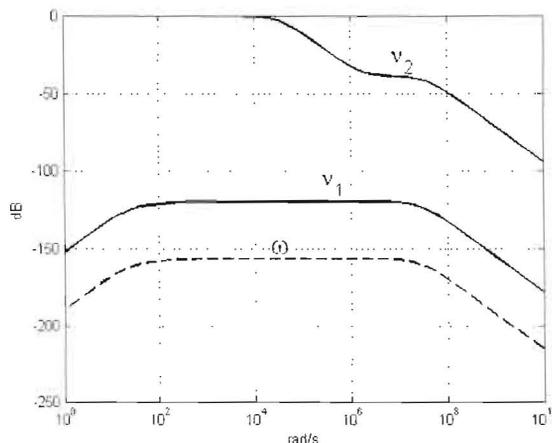


Figura 2. Diagrama de Valores Singulares máximos: $H_{e_2 v_2}, H_{e_2 v_1}, H_{e_2 w}$.

apreciar la sensibilidad del filtrado ante las fallas en relación a la perturbación.

En la Figura 3 se muestran las señales de perturbación y de fallas, las salidas del sistema y los errores de la salida. Es evidente la fuerte pre-

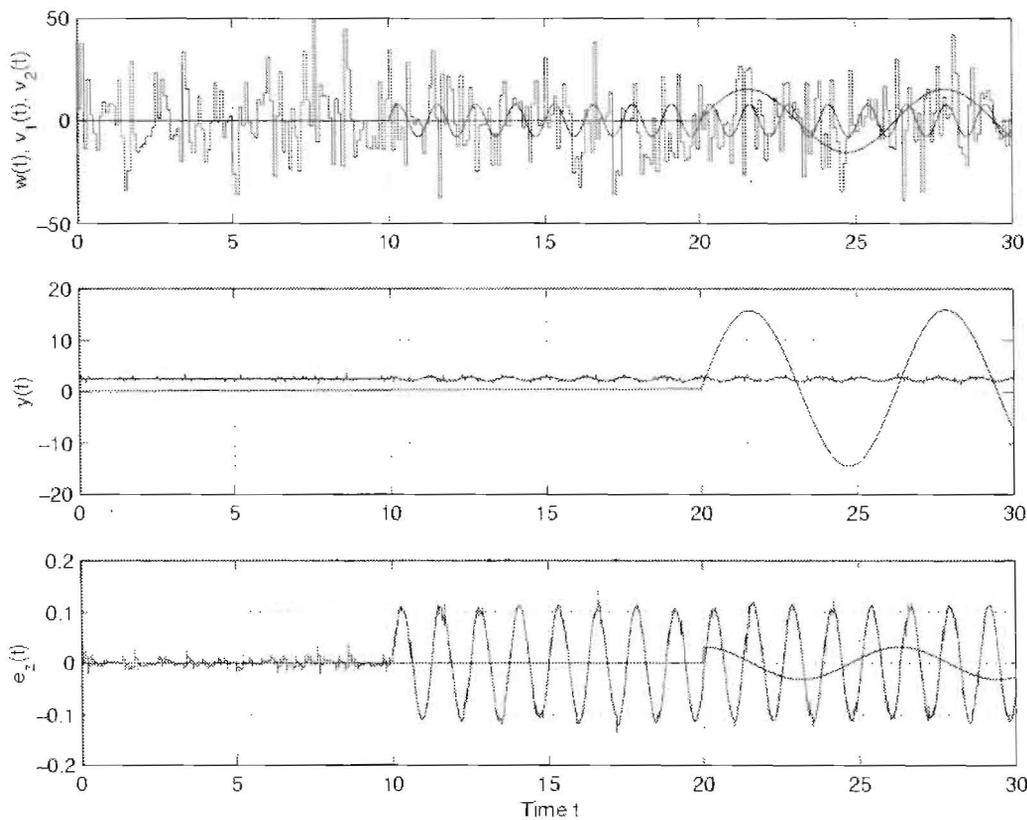


Figura 3. Respuestas del filtro a las señales de perturbación y fallas.

sencia de la señal de ruido. En esa Figura 3 la falla en el actuador tiene una presencia a partir de $t = 10$ s. Se observa en las señales de error de las salidas que dicha falla es detectada y separada. Una única señal de error se activa en el momento de la presencia de la falla ($t = 10$ s.).

Cuando ocurre la falla en el sensor en $t = 20$ s, se observa de las señales de error que la misma que permanecía desactiva cambio de valor generando el residuo correspondiente por lo que la falla es detectada y aislada. Se aprecia, entonces, que cada salida del error está asociada a cada falla de manera que se logra la separabilidad para el diagnóstico. De igual manera, el efecto de la presencia de la perturbación es minimizado, como se puede observar en la salida del error antes de que ocurra la falla en el actuador.

6. Conclusiones

Hemos presentado una estrategia de diseño de filtros robustos de detección de fallas basados en el control óptimo robusto mediante LMI's. El método consiste en el diseño de un post-filtro, el cual se obtiene por solución de un problema de control óptimo robusto en el cual la matriz de control es un parámetro de diseño.

El método se establece en dos etapas: la primera es la construcción de un observador de estados cuya ganancia se diseña en procura de separar las fallas y se incorpora una señal "control" en pre-adelanto. En la segunda etapa se diseña un post-filtro mediante la solución de un problema de control robusto basado en LMI's, el cual genera la señal de "control".

Con la solución del problema de control se alcanza la estabilidad asintótica de la dinámica del error y se minimiza el efecto de las señales de perturbación externa. Cualquier método de síntesis de controladores basados en LMI's puede ser aplicado, incluyendo técnicas con criterios multi-objetivos.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido financiado por el CDCHT-ULA y el FONACIT.

Referencias

1. Nagpal, K.M. and P.P. Khargonekar (1991). Filtering and smoothing in an \mathcal{H}_∞ setting. *IEEE Trans. Automatic Control* 36(2), 152-166.
2. Khargonekar, P.P. and M.A. Rotea. (1992). "Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering. In: *31th IEEE Conf. on Decision and Control*. 2299-2304.
3. Geromel, J.C., J. Bernussou, G. García and M.C. de Oliveira (2000). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM J. Control Optim.* 38(5), 1353-1368.
4. Edelmayer, A., J. Bokor and L. Keviczky (1994). An \mathcal{H}_∞ filtering approach to robust detection of failures in dynamical systems. In: *33th IEEE Conference on Decision and Control*. Lake Buena Vista. 3037-3039.
5. Patton, R.J., P.M. Frank and R.N. (2000). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamical Systems*". Springer-Verlag.
6. Ríos-Bolívar, A. and G. García (2001). Robust filters for fault detection and diagnosis: An \mathcal{H}_∞ optimization approach. In: *6th European Control Conference*. Porto - Portugal. pp.132-137.
7. Niemann, H. and J. Stoustrup (1998). Multi objective design techniques applied to fault detection and isolation. In: *American Control Conference*. ACC. Philadelphia. 4496-4500.
8. Shaked, U. and Y. Theodor (1992). \mathcal{H}_g -optimal estimation: A tutorial. In: *31st IEEE Conf. Decision and Control*. Tucson. pp. 2278-2286.
9. Zhong, M., S.X. Ding, J. Lam and H.Wang (2003). An lmi approach to design robust fault detection filter for uncertain lti systems. *Automatica* 39, pp. 543-550.
10. Knoblock, H.W., A. Isidori and D. Flockerzi (1993). *Topics in Control Theory*. Birkhäuser Verlag.
11. de Souza, C.E., U. Shaked and M. Fu (1992). Robust \mathcal{H}_∞ filtering with parametric uncertainty and deterministic input signal. In: *31st IEEE Conf. Decision and Control*. Tucson. 2305-2310.
12. Grigoriadis, K.M. and J.T. Watson (1996). Suboptimal \mathcal{H}_∞ filtering via linear matrix in-

- equalities. In: *IFAC World Congress*. San Francisco. pp. 197-202.
13. Gahinet, P. and P. Apkarian (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *Int. J. of Robust and Nonlinear Control* 4(4), 421-448.
 14. Grimble, M.J. (1987). \mathcal{H}_∞ design of optimal linear filtering. In: *Proc. IEEE Conf. MTNS'87*.
 15. Scherer, C. (1995). Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control. In: *Trends in Control: A European Perspective* (A. Isidori, Ed.). pp. 173-216. Springer-Verlag.
 16. Scherer, C., P. Gahinet and M. Chilali (1997). Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Trans. Automatic Control* 42(7), pp. 896-911.
 17. Doyle, J.C., K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis (1989). State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Trans. Automatic Control* 34(8), 831-847.
 18. Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*". SIAM.
 19. Chen, J., R.J. Patton and H. Zhang (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *Int. Journal of Control* 63(5), 85-105.
 20. Ríos-Bolívar, A., G. García, F. Szigeti and J. Bernussou (1999). A fault detection and isolation filter for linear systems with perturbations. In: *14th IFAC World Congress*. Vol. O. Beijing. pp. 563-568.
 21. Massoumnia, M.A. (1986). A geometric approach to the synthesis of failure detection filters". *IEEE Trans. Automatic Control* 31(9), 839-846.
 22. Ríos-Bolívar, A. (2001). Sur la Synthèse de Filtres de Détection de Défaillances. PhD thesis. Université Paul Sabatier. Toulouse.
 23. Blanke, M., S.A. Bogh, R.B. Jorgensen and R.J. Patton (1995). Fault detection for diesel engine actuator - a benchmark for fdi. *Control Eng. Practice* 3(12), 1731-1740.

Recibido el 01 de Noviembre de 2004

En forma revisada el 31 de Octubre de 2005