

# Fractional Fourier transform of coherent optical systems application

Carlos Jiménez Ruiz<sup>1\*</sup>, Jaime Castillo Pérez<sup>1</sup>, Susana Salinas de Romero<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de la Guajira, Centro de Investigaciones,  
Grupo de Investigación en Matemática Aplicada (GIMA). Riohacha, Colombia.

\*carlosj114@gmail.com, jacas68@yahoo.es

<sup>2</sup>Centro de investigación de Matemática Aplicada (CIMA), Universidad del Zulia, Maracaibo,  
Venezuela. susanaderomero@hotmail.com

## Abstract

In 1980 Namias presented the Fourier transform of Fractional order as a generalization of the well known Fourier transform, establishing the mathematic character of this with its set of theorems and properties. Initially he used it to solve problems with the harmonic oscillator quantum mechanics. Recently, the Fourier Optics area has expanded with new contributions related to non conventional transformation, the so called fractional ones. For example, it has been proposed the applications of fractional Fourier transforms (FFT), for spatially variant filtering, characters recognition, encryption, water marks, implementation of neural networks, etc. In this work, we present a mathematic development of continuous fractional Fourier transform. It is applied to optical systems coherent to the signal processing.

**Key words:** Fractional Fourier transform, optical systems, signal processing.

## Transformada fraccional de Fourier aplicado a sistemas ópticos coherentes

### Resumen

En 1980 Namias presentó la Transformada de Fourier de orden fraccional como una generalización de la bien conocida Transformada de Fourier, estableciendo el carácter matemático de la misma junto con un conjunto de teoremas y propiedades. Inicialmente la utilizó para resolver problemas con el oscilador armónico mecánico cuántico. Recientemente en el área de la óptica de Fourier se ha extendido con nuevas contribuciones relativas a transformadas no convencionales denominadas transformadas Fraccional. Se han propuesto, por ejemplo, las aplicaciones de la transformada de Fourier fraccional (TFF) para filtrado espacialmente variante, reconocimiento de caracteres, encriptación de marcas de agua, implementación de redes neuronales, etc. En este trabajo se presenta un desarrollo matemático de la transformada Fraccional de Fourier continua aplicado a sistemas ópticos coherente para el procesamiento de señales.

**Palabras clave:** Transformada fraccional de Fourier, Sistemas ópticos, procesamiento de señales.

### 1. Introducción

En general los lentes se emplean para formar imágenes por medio de la refracción en instrumentos ópticos, como cámaras, microscopios, telescopios, etc. El interés en conocer la ubicación de la imagen de una lente radica en el hecho de poder ser utilizada por una superficie refrac-

tante como el objeto para una segunda superficie.

En este trabajo se consideran los sistemas ópticos coherentes, los cuales son sistemas lineales con distribución de amplitud compleja en donde las imágenes se forman en un plano ubicado detrás de la lente positiva. Con ayuda del ope-

rador Transformada Fraccional de Fourier (TFF) y la matriz de transferencia de rayo (MTR) [1, 2] se estudian detalladamente los principales sistemas ópticos coherentes; utilizando el análisis de la óptica ondulatoria y la aproximación paraxial.

**1.1. La transformada fraccional de Fourier continua**

La TFF de orden  $\alpha$  es una operación canónica lineal definida según Ozatkas [3] por la integral:

$$f_\alpha(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k_\alpha(u, u') f(u') du' \tag{1}$$

Con núcleo (ver ecuación 2)

donde  $\alpha = \frac{a\pi}{2}, |a| \leq 2$ .

De la definición se tiene que  $\mathfrak{S}^{4i}$  y  $\mathfrak{S}^{4i\pm 2}$  corresponde al operador identidad y al operador paridad respectivamente.

Para  $\alpha = 1$ , se tiene que  $\sqrt{1 - i \cot \alpha} = 1$  y por tanto

$$f_1(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi uu'} f(u') du' \tag{3}$$

donde (3) corresponde a la transformada de Fourier estándar [3].

El  $\alpha$  de la ecuación (2) sólo es argumento de funciones trigonométricas, esto indica que la TFF es periódica en  $a(\alpha)$  con periodo 4 y  $a \in (-2, 2]$ . Algunas propiedades importantes de la TFF son establecidas de la siguiente manera:

i. Linealidad

$$\mathfrak{S}^\alpha [c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)] = c_1 \{ \mathfrak{S}^\alpha [u_1(x)] \} + c_2 \{ \mathfrak{S}^\alpha [u_2(x)] \}$$

ii. Aditividad del índice

$$\mathfrak{S}^{\alpha_1} \mathfrak{S}^{\alpha_2} = \mathfrak{S}^{\alpha_1 + \alpha_2}$$

iii. Reducción a la transformada de Fourier estándar cuando  $\alpha = 1$ .

**1.2. La transformada fraccional de Fourier en 2-D**

La TFF en 2-D con órdenes  $\alpha_x$  para el eje  $x$  y  $\alpha_y$  para el eje  $y$ , con  $0 < |\alpha_x| < 2$  y  $0 < |\alpha_y| < 2$  respectivamente, se define como [4]

$$\mathfrak{S}^{\alpha_x, \alpha_y} [f(x, y)](x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} B_{\alpha_x, \alpha_y}(x, y; x', y') f(x', y') dx' dy' \tag{4}$$

donde  $B_{\alpha_x, \alpha_y}(x, y; x', y') = B_{\alpha_x}(x, x') B_{\alpha_y}(y, y')$ .

Las propiedades de la TFF en 2-D han sido estudiadas en [4].

**1.3. Matriz de transferencia de rayos**

Un rayo paraxial es una sección transversal de un sistema óptico, está caracterizado por su distancia  $x$  del eje óptico y la pendiente  $x'$ . Si ésta pendiente se asume pequeña, el camino del rayo a través de una estructura dada depende de las propiedades ópticas de la estructura  $y$  de las condiciones de entrada. En este caso la relación entre los parámetros de entrada y salida está dada por [1]:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \tag{5}$$

La matriz ABCD es llamada la Matriz de Transferencia de Rayos y su determinante generalmente es la unidad. La relación (5) permite obtener la caracterización total de un sistema óptico si se conocen sus elementos básicos tales como lentes, espejos u espacios libres lo cual es en esencia la característica de cualquier sistema óptico.

**1.4. La transformada fraccional de Fourier y la fórmula de Collins**

La fórmula de Collins [5], permite encontrar la distribución de amplitud compleja entre dos superficies planas cuando entre ellas existe un sistema óptico cuya matriz de transferencia de

---


$$K_\alpha(u, u') = \begin{cases} \sqrt{1 - i \cot \alpha} \exp[i\pi(\cot \alpha u^2 - 2 \csc \alpha uu' + \cot \alpha u'^2)] & \text{si } \alpha \neq 2i \\ \delta(u - u') & \text{si } \alpha = 4i \\ \delta(u - u') & \text{si } \alpha = 4i \pm 2 \end{cases} \tag{2}$$


---

rayos es conocida y por tanto caracterizada por sus elementos componentes; de tal forma que esta situación física queda expresada correcta matemáticamente como:

$$U_A(u, v) = \frac{-i}{\lambda B} \exp\left(\frac{i\pi D(u^2 + v^2)}{\lambda B}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i\pi A(\xi^2 + \eta^2)}{\lambda B}\right) \times \exp\left(\frac{-2i\pi(u\xi + v\eta)}{\lambda B}\right) U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (6)$$

(6) relaciona la distribución de amplitud compleja entre los planos de entrada  $U_p(\xi, \eta)$  y de salida  $U_A(u, v)$  de sistemas ópticos caracterizados por su matriz de transferencia de rayos (MTR). En esta situación particular los elementos del sistema óptico son incorporados a la expresión (6) o formula de Collins a través de los elementos de la matriz de transferencia de rayos  $AB$  y  $D$ .

Una observación detallada de la forma matemática de la expresión (6) permite plantear la posibilidad de reescribir la formula de Collins en términos de la transformada de Fourier de orden fraccional bidimensional, ver ecuación (4). Para ello se ha de considerar ya no una iluminación con onda plana monocromática sino con onda esférica; para la descripción adecuada de esta nueva situación física se considera ahora la distribución de amplitud compleja  $U_p(\xi, \eta)$  en el plano de entrada al sistema óptico, la cual ahora se encuentra sobre una superficie de radio  $\frac{R_1}{A} > 0$  (onda esférica convergente). Multiplicando adecuadamente la ecuación integral de Collins por este factor de curvatura de fase, se encuentra una relación que se denomina operador transformada fraccional de Fourier expresado de la siguiente forma:

$$U_p(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i\lambda B} \exp\left(\left(\frac{D}{B} - \frac{\cos^2 \alpha}{AB\left(1 - \frac{B}{R_1}\right)}\right) \frac{i\pi(u^2 + v^2)}{\lambda}\right) \times \exp\left(-i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \mathfrak{S}^\alpha[U_A(\xi, \eta)], \quad (7)$$

donde

$$\mathfrak{S}^\alpha[U_A(\xi, \eta)] = \frac{\exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]}{2\pi \sin \alpha} \exp\left(\frac{-i(u^2 + v^2)}{2 \tan \alpha}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-i(\xi^2 + \eta^2)}{2 \tan \alpha}\right) \exp\left(\frac{i(u\xi + v\eta)}{\sin \alpha}\right) \times U_A(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8)$$

La ecuación (8) indica que la formula integral de Collins puede ser escrita como una transformada fraccional de Fourier, utilizando la definición presentada por Namias. Físicamente esto significa que se ha introducido una curvatura de fase tanto en el plano de entrada como en el de salida, es decir con la utilización de la transformada fraccional de Fourier se ha encontrado una nueva expresión de Collins que permite encontrar la distribución de amplitud compleja sobre superficies esféricas en sistemas ópticos coherentes cuando se conoce la matriz característica de transferencia de rayos del sistema óptico y la distribución de amplitud compleja de entrada se encuentra también sobre una superficie esférica; esto posibilita estudiar sistema ópticos coherentes en aproximación metaxial, desbordando de esa forma el enfoque clásico puramente paraxial.

## 2. Resultado Experimental

Como una aplicación del resultado obtenido se propone estudiar un experimento clásico de la óptica conocido como el interferograma de Young, el cual permite estudiar fenómenos tales como la coherencia; para ello se asumen pares de orificios en el plano de entrada del sistema óptico el cual está constituido simplemente por una lente convergente, de tal forma que se desea obtener la distribución de amplitud compleja en la superficie de salida la cual se encuentra a la distancia de Fresnel en contraposición al tratamiento clásico que utiliza distancias de Fraunhofer; este nuevo enfoque permite la generalización del interferograma clásico de Young introduciendo el concepto de interferograma fraccional de Young. Para la implementación analítica y experimental de esta situación física se utiliza el montaje canónico de Lohmann de tipo I, aquí la distancia entre el plano complejo de entrada  $U_A(\xi, \eta)$  y el plano complejo de salida  $U_p(u, v)$  están ubicados de manera equidistante a una lente que se encuentra entre ellos, como muestra la Figura 1.

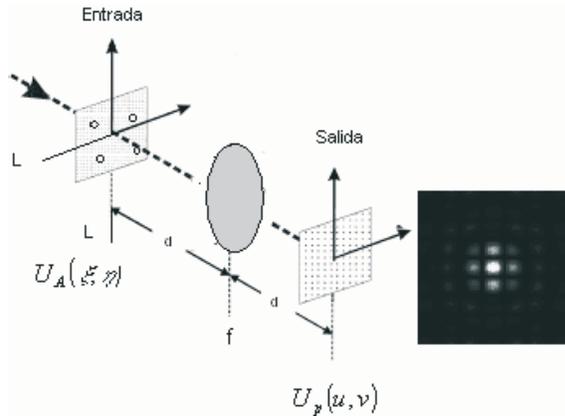


Figura 1. Interferograma fraccional de Young.

Cuando los planos de entada y salida están a la distancia focal de la lente, se tiene la transformación estándar de Fourier. Ahora, si estas distancias se controlan adecuadamente, es decir moviendo los planos de tal manera que sean equivalentes con la lente, se tendrá entonces una transformación fraccional de Fourier.

Los resultados experimentales presentados en este artículo se obtuvieron con su montaje Lohmann tipo I con las siguientes parámetros y variables físicas:

Una lente convergente con distancia focal = 200mm, el orden fraccional considerado es  $\alpha = 0,8$ , y la distancia  $d = 16$ mm.

El montaje óptico experimental utiliza un láser de Helio-Neon con longitud de onda de 632,8 nm, y potencia de 5mW. El objeto de difracción con 4 orificios simétricamente espaciados, fue diseñado sobre un acetato o transparencia convirtiéndose por consiguiente en el objeto de transmitancia. El patrón de difracción, que corresponde al módulo de la distribución de amplitud compleja de salida o intensidad obtenido sobre la superficie de salida se muestra en la Figura 1.

Si se considera la configuración mostrada en la Figura 1, y se utiliza el resultado encontrado en la ecuación (7), la cual establece una relación de transformada fraccional entre las distribuciones de amplitud compleja del plano donde se encuentran los orificios (separados por una distancia  $d$  sobre cada eje) y el plano de observación. La MTR de este sistema está dada por:

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f} & 2d - \frac{d^2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

con estas consideraciones, el factor de fase en (7) se hace 1. Al sustituir  $B$  de (9) se obtiene la expresión para ondas planas:

$$U_p(u, v) = \frac{2\pi \sin \alpha}{i \left( 2d - \frac{d^2}{f} \right)} \exp \left( -i \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) \mathfrak{S}^\alpha [U_A(\xi, \eta)]. \tag{10}$$

donde  $d = 2f \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

En la situación particular cuando se ilumina el emisor con una onda plana y luego se obtiene una transformada de Fourier de orden fraccional sobre una superficie detectora plana se debe cumplir

$$\left( 1 - \frac{d}{f} \right) \left( 1 - \frac{d}{f} \right) = \cos^2 \alpha.$$

Luego  $A \cdot D = \cos \alpha$  entonces  $A = D = \cos \alpha$ , lo cual significa que si los elementos de la matriz de transferencia de rayos son conocidos la condición del sistema óptico para la cual la transformada de Fourier de orden fraccional se convierte en una poderosa y compacta formulación para el estudio de la propagación de ondas en un sistema óptico cuya matriz de rayos es conocida.

Se observa que la relación (8) corresponde al montaje canónico de Lohmann tipo I [6]; si se considera que la distribución de amplitud compleja producida por el objeto de difracción puede ser representada por:

$$U_A(\xi, \eta) = A \left[ \delta \left( \xi - \frac{L}{2} \right) + \delta \left( \xi + \frac{L}{2} \right) \right] \times \left[ \delta \left( \eta - \frac{L}{2} \right) + \delta \left( \eta + \frac{L}{2} \right) \right] d(\xi)d(\eta). \tag{11}$$

teniendo en cuenta que

$$\mathfrak{S}^\alpha \left[ \delta \left( \xi \mp \frac{L}{2} \right) \right] = \frac{\exp \left[ -i \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \times \exp \left[ -\frac{i}{2} \cot \alpha \left( \xi^2 + \frac{L^2}{4} \right) \pm i \frac{L}{2} \xi \csc \alpha \right] \tag{12}$$

y que

$$\mathfrak{F}^\alpha[\delta(\xi)] = \frac{\exp\left[-i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sqrt{2\pi \sin \alpha}} \exp\left[-\frac{i}{2}\xi^2 \cot \alpha\right]. \quad (13)$$

Usando (12) y (13) y aplicando (8) a (11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^\alpha[U_A(\xi, \eta)] = & \frac{\exp[-i(\pi - 2\alpha)]}{\pi^2} \exp\left(\frac{-i}{2} \cot \alpha\right) \left(2\xi^2 + 2\eta^2 + \frac{L^2}{2}\right) \\ & \cos \frac{L}{2} \xi \csc \alpha \cos \frac{L}{2} \eta \csc \alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Debido al escalamiento respectivo de la amplitud compleja de salida debido al montaje óptico, Figura 1. Introduciendo parámetros de escala en la distribución de amplitud compleja [6].

$$\text{Haciendo } x = -\frac{u}{2\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \eta = -\frac{v}{2\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

en (14) se tiene:

$$\begin{aligned} U_p(u, v) = & \frac{2\pi \sin \alpha}{i\pi^2 \lambda \left(2d - \frac{d^2}{f}\right)} \cos\left(\frac{Lu}{4\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \csc \alpha\right) \\ & \cdot \cos\left(\frac{Lv}{4\lambda f \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \csc \alpha\right) \cdot \exp\left(-3i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \end{aligned}$$

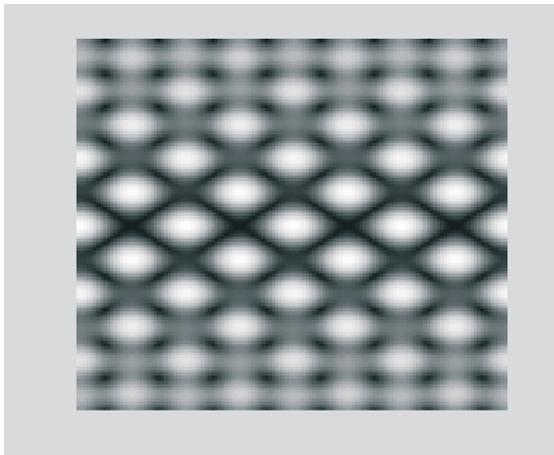


Figura 2. Transformada estándar.

$$\exp\left(\frac{-i}{2} \cot \alpha\right) \left(\frac{u^2}{2\lambda^2 f^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} + \frac{v^2}{2\lambda^2 f^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}} + \frac{L^2}{2}\right) \quad (15)$$

### 3. Simulación digital

Con la ayuda de una rutina computacional en la plataforma matemática Matlab se obtuvo una simulación digital de la transformada fraccional de orden con los resultados mostrado en las Figuras 2-5, en la cual se observa efectivamente que existe una modulación en la separación entre franjas por el factor obtenido en la ecuación (15), el cual indica que la separación de los cuadros es una función del orden fraccional observado. Alcanzando el valor máximo de separación en  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , Transformada de Fourier estándar, Figuras 2 y 3.

### 4. Conclusiones

Se ha probado de manera clara y sencilla como se puede introducir la transformación fraccional de Fourier en el campo del análisis y procesamiento de imágenes, así como sus potencialidades. Es importante recalcar el valor que ha tenido el auge de estos tópicos en la medida que grandes volúmenes de aplicaciones con esta nueva herramienta han suscitado. El propósito de este artículo no fue otro distinto al de aplicar la transformada fraccional de Fourier en la solu-

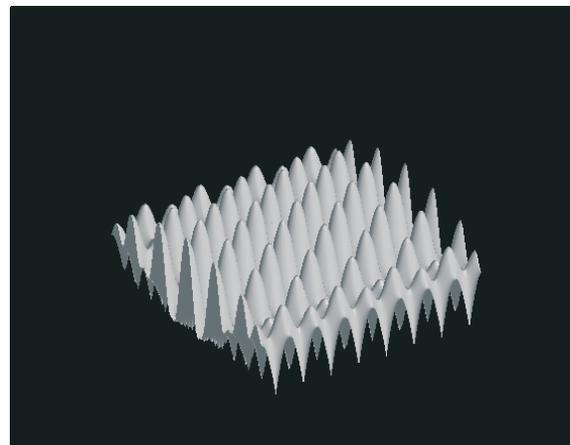


Figura 3. Transformada estándar en 3-D.

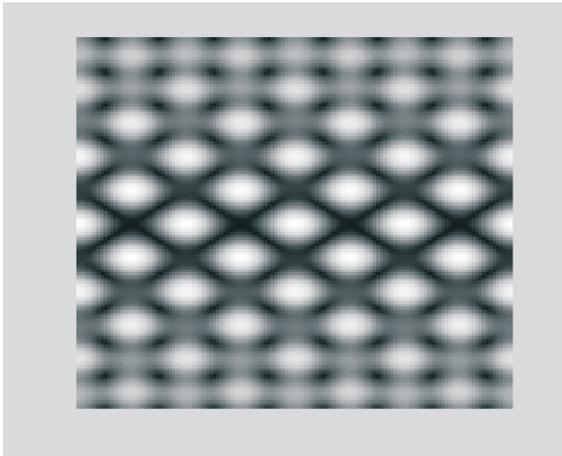


Figura 4. TFF de orden 0.8.

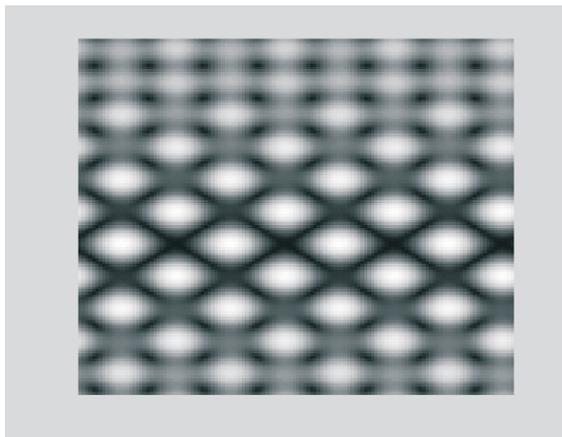


Figura 5. TFF de orden 0.2.

ción de problemas ópticos coherentes y en particular resolver un problema clásico de la óptica como es el caso del interferograma de Young, tratamiento nuevo con el cual se introduce una modulación en el patrón de franjas obtenido convencionalmente y que corresponde al efecto de introducir el orden de la transformación fraccional de Fourier.

## Agradecimientos

Esta investigación ha sido realizada gracias al apoyo del Centro de Investigación de la Universidad de la Guajira de Colombia y el CIMA Centro de Investigación en Matemática Aplicada de la Universidad del Zulia (LUZ) de Maracaibo, Venezuela.

## Referencias bibliográficas

1. Goodman W. Introduction to Fourier optics. McGraw-Hill. New York, 1996.
2. Torres César. Ray transfer matrix and fractional Fourier transform. Proceedings Spie. Vol. 4419. (2001). 439-442.
3. Ozaktas H.M., Zalevsky Zeev and Kutay M. Alper. The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing. John Wiley & Sons LTD. New York, 2001.
4. Sahin Aysegul, Ozaktas H.M., and Mendlovic David. Optical implementations of two-dimensional fractional Fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters. Applied Optics. Vol. 37, N° 11, (1998) 2130.
5. Morales W., Perpiñan G., Caballero G., Torres C.O., Mattos L. Análisis de sistemas ópticos coherentes utilizando el operador Transformada Fraccional de Fourier. Revista Colombiana de Física. Vol. 35, N° 1, (2003) 164.
6. Lohmann., A.W. Image rotation, Wigner Rotation, and the fractional Fourier Transform. J. Opt. Soc. Am. A10, (1993) 2181-2186.

Recibido el 30 de Julio de 2009

En forma revisada el 4 de Octubre de 2010