

Technical note

Wavelength calculation using dimensional analysis technique

Ronnie Torres Hugues

*Centro de Investigaciones Hidráulicas. Calle 114 N° 11901 e/. 119 y 127,
Marianao, La Habana, Cuba, CP. 19390. Telef.: (537) 260 3636 / 260 1416.
Fax: (537) 267 2013. ronnie@cih.cujae.edu.cu*

Abstract

In this article, a dimensional analysis is made thorough Pi theorem to obtain an explicit expression to calculate wavelength in Transitional Water. From this, 3 variants of pairs of Pi parameters are obtained, so from an experiment with 1369 values the behavior is describe and many expressions from a curve fit for each Pi parameter are obtained. Then, the best expression is selected taking into account the correlation coefficient and Fit Standard Error.

Key words: wavelength, dimensional analysis, theorem Pi.

Nota técnica

Cálculo de la longitud de la ola mediante la técnica de análisis dimensional

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio del análisis dimensional aplicándose el Teorema de PI para obtener una expresión explícita de la longitud de la ola en Aguas Transicionales. Del mismo, se obtienen 3 variantes de pares de parámetros Pi, que a partir de un experimento con 1369 valores se describe el comportamiento de las variantes y se obtienen varias expresiones mediante un ajuste de curvas para cada uno de estos parámetros Pi. Posteriormente se selecciona la expresión más adecuada teniendo en cuenta el coeficiente de correlación y el Error Estándar de Ajuste.

Palabras clave: longitud de ola, análisis dimensional, teorema Pi.

Introducción

Dentro de los parámetros que caracterizan a la ola, la altura, el período y la longitud tienen un lugar cimero. Según la Teoría Lineal del oleaje la expresión general para el cálculo de la longitud de la ola es trascendental, debido a que este parámetro aparece en ambos lados de la expresión. Sin embargo, para Aguas Someras y Aguas Profundas se pueden utilizar expresiones directas, debido a comportamientos específicos que conllevan a simplificaciones matemáticas de la expresión original. Por su parte, para Aguas Transicionales es necesario recurrir a artificios mate-

máticos para su determinación, entre estos se encuentran tablas, gráficos, expresiones directas y métodos iterativos de aproximaciones sucesivas. En la literatura relacionada con el tema aparecen varias de estas expresiones directas Eckart [1], Hunt [2], Nielsen [3], Fenton & McKee [4], Guo [5], You [6], que por su sencillez han sido de gran aplicación en los cálculos de ingeniería. Aunque a la hora de buscar exactitud se recurre a los métodos iterativos. En este trabajo se hace uso del análisis dimensional mediante el Teorema de PI para obtener una expresión directa de la longitud de la ola en Aguas Transicionales.

Conceptos básicos

A partir de la relación de dispersión se puede obtener la expresión correspondiente para la longitud de la ola en función de la profundidad y el período:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right) \quad (1)$$

El empleo de esta expresión presenta algunas dificultades debido a que L aparece en ambos miembros de la ecuación. En la misma se puede observar que cuando el argumento de la función $\tanh(2\pi h/L)$ se hace grande, lo cual ocurre cuando la profundidad del mar es mucho mayor que la longitud de la ola, la tangente hiperbólica se aproxima a la unidad, y para valores pequeños del argumento, en profundidades cercanas a la costa, el valor de la función tiende al argumento, de ahí es que se definen los términos de Aguas Profundas y Aguas Someras, estableciéndose los límites según se muestra en la Tabla 1. Para h/L igual a $1/2$ la tangente hiperbólica es $0,9964$, que es muy próximo a 1 , por lo que se establece este valor como límite. Cuando la profundidad relativa, h/L , se hace pequeña, menor que $1/20$, la longitud de la ola se puede simplificar.

Parte experimental

Utilizando las facilidades que proporciona el Teorema PI de la mecánica de los fluidos Streeter [8] se pretende encontrar una expresión directa que permita calcular la longitud de la ola. Para ello se toma en cuenta que intervienen cuatro variables: L , g , h y T , donde g es la aceleración de la gravedad en $[m/s^2]$, h es la profundidad en $[m]$ y T es el período de la ola en $[s]$, por lo que aparecen 2 dimensiones: L y T . El número de parámetros

adimensionales se obtiene de la diferencia entre la cantidad de variables y la cantidad de dimensiones, de esta forma el problema tiene 2 Parámetros Pi.

La relación funcional se expresa dimensionalmente, elevando las variables dependientes a coeficientes:

$$[L] = f([LT^{-2}]^X, [L]^Y, [T]^Z). \quad (2)$$

Como debe ser una ecuación dimensionalmente homogénea, el lado izquierdo de la igualdad tiene que tener la misma dimensión que el lado derecho de la igualdad. Esto produce un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas. El número de ecuaciones está dado a que solo intervienen 2 dimensiones L y T y la cantidad de incógnitas se debe a las variables independientes g , h y T respectivamente, por lo que se deben seleccionar 2 variables que se repiten en los diferentes parámetros Pi, con lo cual se producen 3 variantes, como se puede apreciar en la Tabla 2. Luego, se pueden encontrar los parámetros PI teniendo en cuenta el Principio de Homogeneidad Dimensional y, obtener la fórmula que permite encaminar el experimento para obtener la expresión deseada.

Esto indica cómo se debe encausar el experimento, el cual se lleva a cabo mediante un ajuste de curvas, a partir de conocer el período de la ola, la profundidad local y la longitud de ola.

Resultados y discusiones

Se prosigue con la construcción de una matriz donde se ha determinado la longitud de la ola por un método iterativo variando el período entre 2 y 10 s con intervalo de 0.5 s y la profundidad de 1 a 78 m con intervalo de 1m, lo que arrojó 1345 elementos. El valor de 10 s ha sido seleccionado

Tabla 1

Límites de las zonas de oleaje y fórmula correspondiente (Tomado de CERC [7])

Clasificación	h/L	Fórmula
Aguas Someras	$0 - 1/20$	$L = T\sqrt{gh}$
Aguas Transicionales	$1/20 - 1/2$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{L}\right)$
Aguas Profundas	$1/2 - \infty$	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$

tomando como criterio que este es el mayor periodo cruzando el cero que se reporta en el Global Wave Statistics Hogben *et al.* [9] en las Áreas 32, 33 y 47 para todas las direcciones, las cuales describen las condiciones de la zona del Caribe y la profundidad de 78 m es la que corresponde a Aguas Profundas para un periodo de la ola de 10 s. En los valores que sirven de frontera entre Aguas Profundas y Aguas Transicionales y Aguas Transicionales y Aguas Someras se refinó la malla discretizando la profundidad y se alcanzó un total de 1369 elementos. El criterio de zonas seleccionado es "h/L", en este sentido valores menores de 1/20 (0,05) corresponden a Aguas Someras (AS) y valores mayores de 1/2 (0,5) a Aguas Profundas (AP), los valores intermedios a Aguas

Transicionales (AT). En la Figura 1 se puede apreciar el comportamiento de la nube de puntos para la variante 1 de la Tabla 2.

Una vez adimensionalizadas las profundidades y las longitudes de ola, se realizó un ajuste de curvas utilizando el programa TableCurve 2D v5.01, según las distintas variantes obtenidas del Teorema PI tomando en cuenta el rango de la zona de Aguas Transicionales por ser la zona de conflicto de la expresión general. De este proceso se escogió la expresión con mayor coeficiente de correlación que corresponde con la variante 1 de la Tabla 2. Cabe señalar que las expresiones de esta variante presentan el Error Estándar de ajuste (FSE según sus siglas en inglés) más bajo, 100 veces más pequeño que el resto de las expresiones

Tabla 2
Variantes obtenidas con el Teorema PI

Variante	Variables de repetición	1er Parámetro Pi	2do Parámetro Pi	Expresión resultante
1	g, T	$\pi_1 = \frac{L}{gT^2}$	$\pi_2 = \frac{h}{gT^2}$	$\frac{L}{gT^2} = f\left(\frac{h}{gT^2}\right)$
2	h, T	$\pi_1 = \frac{L}{h}$	$\pi_2 = \frac{gT^2}{h}$	$\frac{L}{h} = f\left(\frac{gT^2}{h}\right)$
3	g, h	$\pi_1 = \frac{L}{h}$	$\pi_2 = T\sqrt{\frac{g}{h}}$	$\frac{L}{h} = f\left(T\sqrt{\frac{g}{h}}\right)$

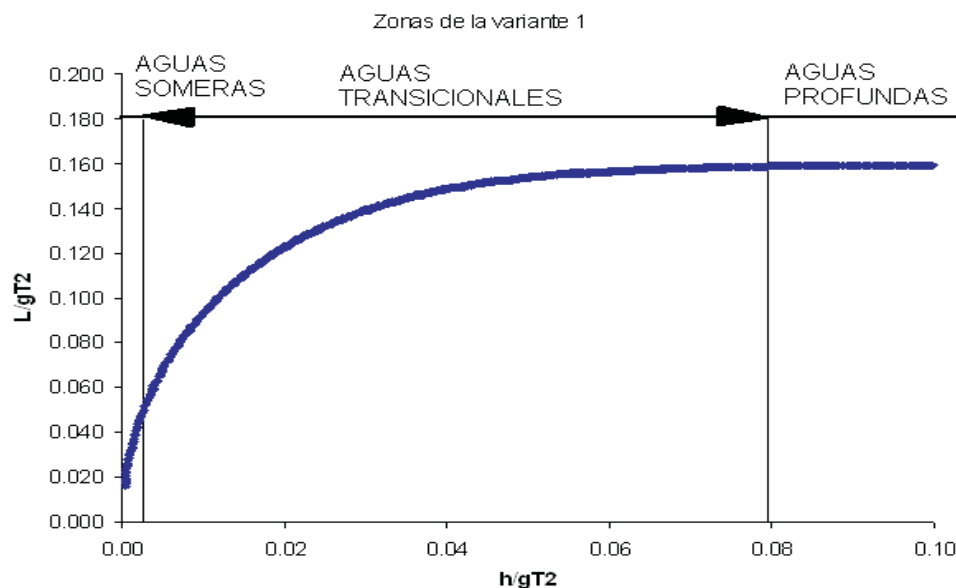


Figura 1. Representación de las zonas para la variante 1.

siones, lo que indica que con estas será más efectivo el resultado. La expresión que se propone finalmente queda de la forma:

$$L = gT^2 \left[A * B \left(\frac{h}{gT^2} \right)^2 + C \left(\frac{h}{gT^2} \right)^2 \ln \left(\frac{h}{gT^2} \right) + D \left(\frac{h}{gT^2} \right)^{20.5} \right] \quad (3)$$

donde A = 0,00036, B = 23,3901, C = 16,6861 y D = 09841.

Conclusiones

Mediante el análisis dimensional se obtuvieron 3 variantes o pares de parámetros Pi. La variante 1 obtenida del análisis dimensional confirmó la expresión de la longitud de la ola en aguas profundas, siendo $L_0 = 0,1591gT^2$. De este experimento se obtuvo que las ecuaciones de la variante 1 son las que menor FSE arrojan por lo que son las que mejor describen la relación entre los parámetros Pi.

Referencias

1. Eckart, C. "Surface Waves on Water of Variable Depth". Scripps Institute of Oceanography, University of California, La Jolla. 1952.
2. Hunt, J. N. "Direct Solution of Wave Dispersion Equation," ASCE Jour. Waterw., Port, Coastal and Ocean Engr., Vol. 105, (1979) 457-459.
3. Nielsen, P. "Explicit formulae for practical wave calculations". Coastal Engineering 6, (1982), 389-398.
4. Fenton, J., Mckee, W.D. "On the calculating lengths of water waves". Coastal Engineering 14. (1990) 499-513.
5. Guo, J. "Simple and explicit solution of wave dispersion equation". Coastal Engineering 45, (2002) b. 71-74.
6. You, Z., 2002. "Discussion of "Simple and Explicit solution to the wave dispersion equation". Coastal Engineering 45, (2002), 71-74.
7. CERC, "Coastal Engineering Manual". USACE. U.S. Army Coastal Engineering Research Center. 2002.
8. Streter, V. "Mecánica de Fluidos". Novena edición, McGraw Hill Interamericana, SA. Colombia. 2000.
9. Hogben, N., Dacunha, N. M. C., Olliver, G.F. "Global Wave Statistics". British Maritime Technology Limited. England. 1986.

Recibido el 2 de Marzo de 2010

En forma revisada el 25 de Abril de 2011